Banco Interamericano de Desenvolvimento

Uma análise de equilíbrio geral sobre a heterogeneidade dos impostos entre setores no Brasil

João Ayres
Jefferson Bertolai
Érika Burkowski
José Rossi Jr.

Departamento de Pesquisa e Economista-Chefe

TEXTOS PARA DEBATE Nº
IDB-DP-1023

Agosto 2023

Uma análise de equilíbrio geral sobre a heterogeneidade dos impostos entre setores no Brasil

João Ayres*
Jefferson Bertolai**
Érika Burkowski***
José Rossi Jr.*

* Banco Interamericano de Desenvolvimento
** Universidade de São Paulo
*** Universidade Federal Fluminense

Agosto 2023

Banco Interamericano de Desenvolvimento

http://www.iadb.org

Abstract

Nós desenvolvemos um modelo multissetorial de equilíbrio geral aplicado para a análise de reformas tributárias no Brasil. Além de trabalho e capital, as firmas representativas de cada setor utilizam os produtos dos demais setores da economia como insumos na produção. O modelo é calibrado para replicar a Matriz de Contabilidade Social e Financeira do Brasil em 2017. A reforma analisada modifica dois impostos sobre a produção, PIS e Cofins, equalizando suas *alíquotas implícitas* entre os 67 setores da economia e adotando como a base de incidência (tributária) única o valor adicionado. A nova alíquota é fixada de forma a manter constante a arrecadação tributária sobre a produção. Partindo de um estado estacionário com tributação exclusivamente sobre a receita, a reforma gera um aumento de 2,4% no consumo privado e 1,4% no PIB real no longo prazo. A maior parte desse ganho advém da equalização da alíquota, que sozinha gera um aumento no consumo privado de 1,5%.

JEL classifications: E60, D58, H22 e H30
Keywords: Contribuição Social sobre Bens e Serviços (CBS), Equilíbrio Geral, Matriz de Contabilidade Social, Reforma Tributária

Acknowledgement: Agradecemos Andre Fritscher, Sergio Gadelha, Maria Cristina Mac Dowell, e Oscar Valencia por comentários e sugestões. Agradecemos Lucas Geraldo pela competente assistência de pesquisa. Erika Burkowski e Jefferson Bertolai agradecem o apoio financeiro do Banco Interamericano de Desenvolvimento (BID). Eventuais opiniões expressas neste artigo não necessariamente representam a posição do BID.

1 Introdução

O presente artigo desenvolve um modelo multissetorial de equilíbrio geral aplicado para a análise de reformas tributárias no Brasil. Os parâmetros do modelo são calibrados de forma a replicar como resultado de equilíbrio competitivo a Matriz de Contabilidade Social e Financeira do Brasil, com foco nas transações entre setores, onde as firmas representativas de cada setor utilizam insumos produzidos pelos demais setores da economia em sua produção. A reforma analisada modifica dois impostos federais sobre a produção, PIS e Cofins, equalizando suas *alíquotas implícitas* entre os 67 setores da economia e adotando como a base de incidência (tributária) única o valor adicionado. A nova alíquota é fixada de forma a manter constante a arrecadação tributária sobre a produção. Comparando os estados estacionários pré e pós-reforma, em que a tributação no estado estacionário inicial é exclusivamente sobre a receita, o modelo implica um ganho de 2,4% e 1,4% em termos de consumo privado e PIB real, respectivamente. Decompondo o ganho entre a equalização de alíquotas e a mudança da base tributária, o modelo mostra que a equalização sozinha gera um ganho de 1,5% no consumo privado.

O sistema tributário brasileiro é caracterizado por sua complexidade, que tem o potencial de gerar distorções alocativas na economia, impondo um custo de bem estar para a população. Não é surpreendente que debates sobre (possíveis) reformas tributárias no Brasil sejam constantes. Mais recentemente, o Projeto de Lei n°. 3.887/2020 ganhou destaque. Dentre suas diversas medidas, ele propõe a criação da Contribuição sobre Bens e Serviços (CBS), que unificaria os atuais tributos federais PIS e Cofins, com a migração completa de sua base tributária para valor adicionado. Adicionalmente, o novo imposto/contribuição buscaria um tratamento mais igualitário entre os setores, no sentido de alcançar uma maior homogeneidade entre as alíquotas dos setores. Motivado por esta discussão, o presente trabalho mensura os ganhos de bem estar potenciais de (i) uniformizar entre setores econômicos a soma das alíquotas *implícitas* do PIS e Cofins e de (ii) adotar o valor adicionado como base de incidência (tributária) única.

São utilizados dados de arrecadação *efetiva* de tributos sobre a produção, desagregados ao nível de 67 setores econômicos e desmembrados entre arrecadação com PIS e Cofins e arrecadação com outros impostos sobre a produção. Assim, a ausência de informações sobre a distribuição de tributação dentro de cada setor e sobre o montante de créditos tributários molda nosso instrumento de análise. Em particular, nosso modelo não incorpora explicitamente a existência de atividades produtivas informais e a calibração dos parâmetros do seu sistema tributário adota a hipótese simplificadora de que não há crédito tributário no Brasil em 2017 (ou seja, que toda a arrecadação observada nos dados foi cobrada sobre o faturamento dos setores). Neste contexto, a calibração do modelo supõe alíquota única dentro de cada setor e alíquotas efetivas (líquidas de créditos tributários) como alíquotas sobre faturamento. Tais hipóteses geram alíquotas *implícitas* com magnitudes menores do que aquelas previstas em lei (efeito da informalidade) e com variabilidade entre setores que reflete a variabilidade de créditos tributários entre setores. A figura 1 apresenta a (calibração da) distribuição de alíquotas implícitas assim obtida. Em 2017, a arrecadação efetiva com PIS/Cofins representou aproximadamente 2,2% do faturamento total de todos os setores econômicos e aproximadamente 4,0% do valor adicionado total de todos os setores econômicos.

O modelo empregado na análise deste trabalho é padrão na literatura. Firmas são perfeitamente competitivas, operam tecnologias com retorno constante de escala e elasticidades de substituição constantes. Além de trabalho e capital, as firmas empregam em sua linha de produção insumos produzidos pelos demais setores da economia. Além de bens intermediários, também são produzidos bens de consumo privado, bens de consumo do governo, um bem de capital privado, um bem de capital do governo, um bem de importação.

Um agente representativo escolhe o quanto consumir, o quanto investir em capital privado, e a fração de seu tempo que é ofertada para a produção de bens e serviços. O capital acumulado é alugado para os produtores de bens em cada período, podendo ser realocado entre os diversos setores da economia livremente.

O governo decide o quanto consumir e investir com base na arrecadação tributária que obtém. Adicionalmente, o governo é responsável pela atividade produtiva de alguns setores, como educação pública, saúde pública, e administração direta. Nesse arcabouço, o governo vê o sistema tributário como dado e a reforma tributária analisada consiste em uma variação exógena no sistema tributário vigente.

Focado na distribuição setorial da economia, o modelo abstrai da heterogeneidade entre indivíduos e entre firmas de um mesmo setor. Dessa forma, a análise não se propõe a gerar previsões de impacto sobre a desigualdade de renda e sobre firmas de tamanhos distintos, por exemplo. Além disso, o modelo é determinísta e, portanto, não gera flutuações econômicas. Por fim, o agente representativo vê a reforma como algo inesperado e permanente.

O arcabouço de equilíbrio geral empregado na análise da reforma tributária mostra que o realinhamento dos preços relativos (implicado pela uniformização de alíquotas) e a eliminação da cumulatividade tributária (implicada pela mudança de base de incidência tributária) geram ganhos de eficiência significativos na economia. Como resultado, o consumo privado aumenta 2,5% no longo prazo, o que é relativamente alto se comparado aos ganhos usualmente estimados pela literatura. Considerando o impacto sobre PIB real, o ganho é de 1,5% no longo prazo. Interessantemente, a maior parte do ganho de consumo gerado pela reforma advém da equalização das alíquotas implícitas entre os setores. Sozinha, ela gera um aumento de consumo privado de aproximadamente $1,5\%$ no longo prazo.

Literatura Relacionada

O presente artigo está relacionado à literatura que utiliza modelos de equilíbrio geral para análise de reformas tributárias no Brasil. Como discutiremos abaixo, a principal diferença com o nosso artigo é a proposta de reforma analisada e a especificação do modelo utilizado em cada um dos estudos. Em geral, a maior parte desses estudos simplifica a estrutura produtiva da economia brasileira ao utilizar um número reduzido de setores ou eliminar as transações intersetoriais.

Tourinho et al. (2010) desenvolvem um modelo com 39 setores para analisar três variações no código tributário brasileiro: (1) a transformação parcial do COFINS em uma contribuição sobre valor adicionado em 2003; (2) a incidência do PIS/COFINS sobre importações em 2003; e (3) a extinção da CPMF 2007. Como mencionado anteriormente, as variações tributárias que os autores analisam são diferentes da estudada no presente trabalho. Adicionalmente, o papel da heterogeneidade é reduzida em comparação ao nosso modelo com 67 setores.

Pereira and Ferreira (2010) desenvolvem um modelo de 1 setor para analisar a proposta tributária de unificação dos impostos com alíquotas similares e a extinção dos impostos cumulativos. Lledo (2005) utiliza um modelo de apenas 1 setor para medir o impacto macroeconômico e redistributivo da substituição do COFINS, PIS-PASEP, CPMF e IOF por um imposto sobre o valor adicionado. Vasconcelos (2017) utilizam um modelo de dois setores sem transações intersetoriais para estudar a reforma do PIS/COFINS em 2002 e 2003. Da Silva et al. (2015) usam um modelo de apenas 2 setores para analisar uma proposta de substituir o imposto sobre a folha de pagamento por um novo imposto sobre a receita. Em todos esses estudos, o papel da heterogeneidade setorial é praticamente eliminado.

Finalmente, Paes (2011) analisa a PEC 233/2008, que propunha: (1) unificação de alguns tributos federais (CIDE-Combustíveis, PIS, COFINS, e contribuição para o FNDE) no IVA-F (imposto sobre valor adicionado federal); (2) simplificação da legislação do ICMS, com unificação da alíquota entre os estados; (3) desoneração da folha salarial; (4) desoneração de investimentos; e (5) desoneração da cesta básica. Seu modelo inclui 55 setores produtores de bens intermediários, mas assume que esses setores não utilizam insumos dos demais setores na produção. Isto é, o estudo exclui completamente as transações intersetoriais de sua análise.

O artigo é organizado em 2 seções, além desta introdução e das considerações finais. A seção 2 apresenta os detalhes do modelo empregado na análise e a seção 3 apresenta os detalhes dos resultados obtidos.

2 O modelo

Com o objetivo de suavizar a assimilação da notação e dos conceitos utilizados, o modelo de equilíbrio geral empregado na análise da proposta de reforma tributária é apresentado em dois passos. A subseção 2.1 apresenta os detalhes da economia intersetorial e a subseção 2.2 insere nesta economia a presença do governo.

2.1 Uma economia intersetorial

Considere uma economia em que o tempo é discreto e o horizonte é infinito. Há nesta economia uma quantidade muito grande (um contínuo) de indivíduos, todos eles com horizonte de vida infinito, que serão representados por um único agente, por este motivo denominado o *agente representativo* desta economia.

Em cada período $t \in \mathbb{N}$, o conjunto de bens e serviços desta economia é dado por $\mathcal{B} \equiv \{1, 2, \cdots, b\}$, em que $b \in \mathbb{N}$. Cada bem ou serviço possui três potenciais usos alternativos: (i) consumo pelos indivíduos, (ii) emprego na linha de produção de bens e serviços como insumo ou (iii) emprego na linha de produção de bens e serviços como bem de capital. A cesta de consumo e a cesta de bem de capital demandadas pela população são denotadas por $z_{\cdot\mathtt{c}} \equiv (z_{1\mathtt{c}}, z_{2\mathtt{c}}, \cdots, z_{b\mathtt{c}})$ e $z_{\cdot\mathtt{k}} \equiv (z_{1\mathtt{k}}, z_{2\mathtt{k}}, \cdots, z_{b\mathtt{k}})$, respectivamente. Similarmente, a cesta de insumos demandada pela linha de produção de bem j é denotada por $z_{\cdot j} \equiv (z_{1j}, z_{2j}, \cdots, z_{bj})$. Sendo $P \equiv (P_1, P_2, \cdots, P_b)$ o vetor de preços vigente no mercado de bens e serviços e $j \in \{\mathtt{c}, \mathtt{k}\} \cup \mathcal{B}$ um bem ou serviço arbitrário, então o custo de aquisição da cesta $z_{\cdot j}$ por meio do mercado de bens e serviços é dado por $\langle P, z_{\cdot j} \rangle \equiv \sum_{i \in \mathcal{B}} P_i z_{ij}$. Analogamente, a receita obtida por meio do atendimento das demandas $z_{i\cdot} \equiv (z_{i1}, z_{i2}, \cdots, z_{ib})$ e $(z_{i\mathsf{c}}, z_{i\mathsf{k}})$ é dada por $Y_i \equiv P_i y_i$, em que $y_i \equiv \sum_{j \in \{\mathsf{c},\mathsf{k}\} \cup \mathcal{B}} z_{ij}$. A tabela 1 a seguir apresenta de maneira bastante conveniente os três usos alternativos de cada bem ou serviço.

		Linha de produção				População		Total
		1	2	$\cdots$	b	C	I	
Bem/serviço	1	$P_1 z_{11}$	$P_1 z_{12}$	$\cdots$	$P_1 z_{1b}$	$P_1 z_{1\mathsf{c}}$	$P_1 z_{1\mathsf{k}}$	Y_1
	2	$P_2 z_{21}$	$P_2 z_{22}$	$\cdots$	$P_2 z_{2b}$	$P_2 z_{2\mathsf{c}}$	$P_2 z_{2\mathsf{k}}$	Y_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	b	$P_b z_{b1}$	$P_b z_{b2}$	$\cdots$	$P_b z_{bb}$	$P_b z_{b\mathsf{c}}$	$P_b z_{b\mathsf{k}}$	Y_b
Total		$\langle P, z_{\cdot 1} \rangle$	$\langle P, z_{\cdot 2} \rangle$	$\cdots$	$\langle P, z_{\cdot b} \rangle$	$\langle P, z_{\cdot \mathsf{c}} \rangle$	$\langle P, z_{\cdot \mathsf{k}} \rangle$	

Table 1: Usos alternativos de cada bem ou serviço

O uso de cada bem ou serviço para *consumo* é apresentado na coluna da tabela 1 rotulada por C e o uso de cada bem ou serviço para *investimento* em bem de capital é apresentado na coluna da tabela 1 rotulada por I. A diferença entre a receita de vendas do bem ou serviço j e o gasto com insumos na linha de produção j é dada por $Y_j - \langle P, z_{\cdot j} \rangle$ e recebe a denominação de *valor adicionado* pela atividade de produção de bem ou serviço j.

A linha de produção de bem/serviço j pode também admitir o emprego de *fatores de produção* para transformar em bem j o vetor de insumos $z_{\cdot j} = (z_{1j}, z_{2j}, \cdot, z_{bj})$. Os insumos podem ser transformados mediante o emprego de dois tipos de fatores de produção: capital e trabalho. Os dois fatores de produção são possuídos pela população, podem ser heterogêneos e podem ser alugados para uso na linha de produção. O fator capital pode se diferenciar pelo bem ou serviço utilizado para sua produção. O fator trabalho pode se diferenciar pela habilidade (capital humano) de cada trabalhador, a qual admite valores em $\mathcal{S} = \{1, 2, \cdots, s\}$.

Se empregados na linha de produção j, o bem de capital do tipo $i \in \mathcal{B}$ recebe remuneração R_{ij} e o trabalho do tipo $i \in \mathcal{H}$ recebe remuneração W_{ij}. Assim, o custo de contratação pela linha de produção j da cesta de capital $k_{\cdot j} \equiv (k_{1j}, k_{2j}, \cdots, k_{bj})$ é dado por $\langle R_{\cdot,j}, k_{\cdot j} \rangle \equiv \sum_i R_{ij} k_{ij}$. Similarmente, o custo de contratação pela linha de produção j da cesta de trabalho $h_{\cdot j} \equiv (h_{1j}, h_{2j}, \cdots, h_{sj})$ é dado por $\langle W_{\cdot,j}, h_{\cdot j} \rangle \equiv \sum_{i \in \mathcal{S}} W_{ij} h_{ij}$.

Para a linha de produção de cada bem j, o valor adicionado *restante* após o pagamento da remuneração dos fatores é dado por $\pi_j \equiv Y_j - \langle P_{\cdot j}, z_{\cdot j} \rangle - \langle R_{\cdot j}, k_{\cdot j} \rangle - \langle W_{\cdot j}, h_{\cdot j} \rangle$. O resíduo π_j é denominado *lucro econômico* obtido na linha de produção j. A tabela 2 apresentada a seguir resulta da tabela 1 após a inclusão do valor adicionado obtido em cada linha de produção, posicionado nas novas linhas da tabela. A tabela assim construída é conhecida como *Matriz de Contabilidade Social*.

A produção de cada bem ou serviço $j \in \mathcal{B}$ é executada por um empresa/firma representativa do setor produtor de bem j. A tecnologia de produção disponível para transformar insumos $z_{\cdot j}$ em bem j, mediante o emprego da cesta de capital $k_{\cdot j}$ e da cesta de trabalho $h_{\cdot j}$, é parametrizada pelas funções O_j, Z_j, F_j, K_j e H_j definidas em (1) até (5). Concretamente, a produção de bem j é limitada por

		Linha de produção				População		Total
		1	2	$\cdots$	b	C	I	
Bem/serviço	1	$P_1 z_{11}$	$P_1 z_{12}$	$\cdots$	$P_1 z_{1b}$	$P_1 z_{1\mathtt{c}}$	$P_1 z_{1\mathtt{k}}$	Y_1
	2	$P_2 z_{21}$	$P_2 z_{22}$	$\cdots$	$P_2 z_{2b}$	$P_2 z_{2\mathtt{c}}$	$P_2 z_{2\mathtt{k}}$	Y_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	b	$P_b z_{b1}$	$P_b z_{b2}$	$\cdots$	$P_b z_{bb}$	$P_b z_{b\mathtt{c}}$	$P_b z_{b\mathtt{k}}$	Y_b
Capital	1	$R_{11} k_{11}$	$R_{12} k_{12}$	$\cdots$	$R_{1b} k_{1b}$			K_1
	2	$R_{21} k_{21}$	$R_{22} k_{22}$	$\cdots$	$R_{2b} k_{2b}$			K_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$			$\vdots$
	b	$R_{b1} k_{b1}$	$R_{b2} k_{b2}$	$\cdots$	$R_{bb} k_{bb}$			K_b
Trabalho	1	$W_{11} h_{11}$	$W_{12} h_{12}$	$\cdots$	$W_{1b} h_{1b}$			W_1
	2	$W_{21} h_{21}$	$W_{22} h_{22}$	$\cdots$	$W_{2b} h_{2b}$			W_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$			$\vdots$
	s	$W_{s1} h_{s1}$	$W_{s2} k_{s2}$	$\cdots$	$W_{sb} h_{sb}$			W_s
Lucro		π_1	π_2	$\cdots$	π_b			Π
Total		Y_1	Y_2	$\cdots$	Y_b	$\langle P, z_{\cdot\mathtt{c}} \rangle$	$\langle P, z_{\cdot\mathtt{k}} \rangle$	

Table 2: Matriz de Contabilidade Social

$y_j \leq O_j\left(Z_j, F_j\right)$, em que

$$O_j\left(Z_j, F_j\right) \equiv \frac{1}{A_j}\left(\eta_j \Big[Z_j\Big]^{\sigma_j} + (1-\eta_j)\Big[F_j\Big]^{\sigma_j}\right)^{\frac{1}{\sigma_j}} \tag{1}$$

o índice de insumo Z_j é definido a partir de $z_{\cdot j}$ de acordo com

$$Z_j\left(z_{\cdot j}\right) = \frac{1}{A_j^Z}\left(\sum_{i \in \mathcal{B}} \alpha_{ij}\left(z_{ij}/a_{ij}^z\right)^{\zeta_j}\right)^{\frac{1}{\zeta_j}} \tag{2}$$

e o índice de fatores de produção F_j é definido a partir de $(k_{\cdot j}, h_{\cdot j})$ de acordo com

$$F_j(K_j, H_j) = \frac{1}{A_j^F}\left(\theta_j \Big[K_j\Big]^{\rho_j} + (1-\theta_j)\Big[H_j\Big]^{\rho_j}\right)^{\frac{1}{\rho_j}} \tag{3}$$

$$K_j(k_{\cdot j}) = \frac{1}{A_j^K}\left(\sum_{i \in \mathcal{B}} \kappa_{ij}\left(k_{ij}/a_{ij}^k\right)^{\lambda_{kj}}\right)^{\frac{1}{\lambda_{kj}}} \tag{4}$$

$$H_j(h_{\cdot j}) = \frac{1}{A_j^H}\left(\sum_{i \in \mathcal{S}} \omega_{ij}\left(h_{ij}/a_{ij}^h\right)^{\lambda_{hj}}\right)^{\frac{1}{\lambda_{hj}}} \tag{5}$$

Hipótese 1. *Para cada* $j \in \mathcal{B}$, $(\rho_j, \sigma_j, \zeta_j, \lambda_{kj}, \lambda_{hk}) \in \{x \in \mathbb{R}^5 : 1 > x_i \neq 0$ *para cada* $i\}$ *e* $(\eta_j, \theta_j) \in [0,1]^2$. *Adicionalmente,* $\alpha_{\cdot j} \equiv (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \cdots, \alpha_{bj}) \in \mathbb{R}^b_+$, $\kappa_{\cdot j} \equiv (\kappa_{1j}, \kappa_{2j}, \cdots, \kappa_{bj}) \in \mathbb{R}^b_+$ *e* $\omega_{\cdot j} \equiv (\omega_{1j}, \omega_{2j}, \cdots, \omega_{bj}) \in \mathbb{R}^s_+$ *são tais que*

$$\sum_{i \in \mathcal{B}} \alpha_{ij} = \sum_{i \in \mathcal{B}} \kappa_{ij} = \sum_{i \in \mathcal{S}} \omega_{ij} = 1,$$

A constante ρ_j parametriza a elasticidade substituição entre capital e trabalho na linha de produção j. O parâmetro ζ_j define a elasticidade substituição entre os insumos na mesma linha de produção. A elasticidade substituição na linha de produção j entre insumos e fatores de produção é parametrizada por σ_j. Os vetores $\kappa_{\cdot j}$ e $\omega_{\cdot j}$ parametrizam a heterogeneidade de cada fator de produção na linha de produção j: o parâmetro κ_{ij} é a capacidade de o bem de capital $i \in \mathcal{B}$ atuar como fator de produção capital nesta linha de produção e ω_{ij} é a capacidade de o trabalho $i \in \mathcal{S}$ atuar como fator de produção trabalho na linha de produção j. Os parâmetros em $\left\{A_j, A^Z_j, A^F_j, A^K_j, A^H_j, \left(a^z_{ij}, a^k_{ij}\right)_{i \in \mathcal{B}}, \left(a^h_{ij}\right)_{i \in \mathcal{S}}\right\}$ são constantes de normalização da linha de produção j. Especificamente, cada unidade de produto y_j pode ser produzida empregando $h_{ij} = A_j A^F_j A^H_j a^h_{ij}$ horas de trabalho $i \in \mathcal{S}$ para utilizar $k_{ij} = A_j A^F_j A^K_j a^k_{ij}$ horas de capital $i \in \mathcal{B}$ a fim de combinar $z_{ij} = A_j A^Z_j a^z_{ij}$ unidades de insumo $i \in \mathcal{B}$.[1]

O objetivo da firma representativa do setor produtor de bem j, doravante referida como empresa/firma j, é maximizar o lucro econômico $\pi_j = Y_j - \langle P_{\cdot j}, z_{\cdot j}\rangle - \langle R_{\cdot j}, k_{\cdot j}\rangle - \langle W_{\cdot j}, h_{\cdot j}\rangle$. Em busca de tal objetivo, a empresa j escolhe a cesta de insumos $z_{\cdot j} \in \mathbb{R}^b_+$ e as cestas de fator de produção $(k_{\cdot j}, h_{\cdot j}) \in \mathbb{R}^b_+ \times \mathbb{R}^s_+$ para obter nível de produção $y_j = O_j\left(Z_j(z_{\cdot j}), F_j\left[K_j(k_{\cdot j}), H_j(h_{\cdot j})\right]\right)$. Um montante y_{ji} da produção y_j é ofertada pela firma j para uso intermediário no setor $i \in \mathcal{B}$ e um montante y_{ji} da produção y_j é ofertada pela firma j para uso final $i \in \{\mathtt{c}, \mathtt{k}\}$. Supondo que a firma j não descarta produção, tem-se $y_j = y_{j\mathtt{c}} + y_{j\mathtt{k}} + \sum_{i \in \mathcal{B}} y_{ji}$. Representado de forma compacta, o problema da empresa j é dado por

$$\max_{(z_{\cdot j}, k_{\cdot j}, h_{\cdot j}, y_{j\cdot}) \in \mathbb{R}^{s+3b}_+} \left\{P_j y_j - \langle P_{\cdot j}, z_{\cdot j}\rangle - \langle R_{\cdot j}, k_{\cdot j}\rangle - \langle W_{\cdot j}, h_{\cdot j}\rangle\right\} \tag{6}$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} y_j = \sum_{i \in \{\mathtt{c},\mathtt{k}\} \cup \mathcal{B}} y_{ji} \\ y_j = O_j\left(Z_j(z_{\cdot j}), F_j\left[K_j(k_{\cdot j}), H_j(h_{\cdot j})\right]\right) \end{cases} \tag{7}$$

Conforme discutido anteriormente, a demanda final por bens e serviços se origina do desejo da população por consumo e investimento, a qual é representada por um agente representativo. Em cada período $t \in \mathbb{N}$, o agente representativo possui dotação de $k_{it} \geq 0$ unidades de capital $i \in \mathcal{B}$ e dotação $\bar{l}_{it}$ de horas do tipo $i \in \mathcal{S}$. Um montante $h^s_{ijt} \geq 0$ de horas $\bar{l}_{it}$ é empregado na linha de produção de bem/serviço j e um montante de $l_{it} \geq 0$ horas é alocado para o lazer do indivíduo. A quantidade total de horas dedicadas para trabalho e lazer não pode exceder a dotação de cada tipo de horas do indivíduo: $l_{it} + \sum_j h^s_{ijt} \leq \bar{l}_{it}$. Do estoque de capital k_{it}, um montante $k^s_{ijt} \in [0, k_{it}]$ é empregado na linha de produção do bem/serviço j. O vetor de ofertas de trabalho para a linha de produção j é denotado por $h^s_{\cdot jt} \equiv \left(h^s_{1jt}, h^s_{2jt}, \cdots, h^s_{bjt}\right)$ e o vetor de ofertas de trabalho do tipo i é denotado por

[1] De fato, neste caso $H_j(h_{\cdot t}) = A_j A^F_j$ e $K_j(k_{\cdot t}) = A_j A^F_j$, de forma que $F_j[K_j(k_{\cdot t}), H_j(h_{\cdot t})] = A_j$ Usando este resultado em conjunto com $Z_j(z_{\cdot jt}) = A_j$, obtém-se $y_j = O_j\left\{Z_j\left(z_{\cdot jt}\right), F_j\left[K_j\left(k_{\cdot jt}\right), H_j\left(h_{\cdot jt}\right)\right]\right\} = 1$.

$h^s_{i\cdot t} \equiv (h^s_{i1t}, h^s_{i2t}, \cdots, h^s_{ibt})$. Analogamente, o vetor de ofertas de capital para a linha de produção j é denotado por $k^s_{\cdot jt} \equiv \left(k^s_{1jt}, k^s_{2jt}, \cdots, k^s_{bjt}\right)$ e o vetor de ofertas de trabalho do tipo i é denotado por $k^s_{i\cdot t} \equiv (k^s_{i1t}, k^s_{i2t}, \cdots, k^s_{ibt})$.

O agente representativo aufere utilidade no período t a partir de sua cesta de consumo $z_{\cdot \mathsf{c}}$ e a partir de cesta de lazer $l_{\cdot t} \equiv (l_{1t}, l_{2t}, \cdots, l_{st})$. Especificamente, cada par $(l_{\cdot t}, z_{\cdot \mathsf{c}t}) \in \mathbb{R}^s_+ \times \mathbb{R}^b_+$ gera nível de utilidade

$$u_t(l_{\cdot t}, z_{\cdot \mathsf{c}t}) \equiv U_t\left(L(l_{\cdot t}), C(z_{\cdot \mathsf{c}t})\right)$$

no período t, em que

$$U_t(C, L) = (\nu C^\gamma + (1-\nu)L^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} + \Gamma_t, \tag{8}$$

$$C(z_{\cdot \mathsf{c}t}) \equiv \left(\sum_{i \in \mathcal{B}} \varphi_{ic}\left(z_{i\mathsf{c}t}/a^c_i\right)^{\gamma_c}\right)^{\frac{1}{\gamma_c}}. \qquad \text{e} \qquad L(l_{\cdot t}) \equiv \left(\sum_{i \in \mathcal{S}} \varphi_{il}\left(l_{it}/a^l_i\right)^{\gamma_l}\right)^{\frac{1}{\gamma_l}} \tag{9}$$

Hipótese 2. *$\nu \in (0,1)$, $\varphi_{\cdot l} \equiv (\varphi_{1l}, \varphi_{2l}, \cdots, \varphi_{sl}) \in \mathbb{R}^s_+$ é tal que $\sum_{i\in\mathcal{S}} \varphi_{il} = 1$, $\varphi_{\cdot c} \equiv (\varphi_{1c}, \varphi_{2c}, \cdots, \varphi_{sc}) \in \mathbb{R}^b_+$ é tal que $\sum_{i\in\mathcal{B}} \varphi_{ic} = 1$ e $(\gamma, \gamma_l, \gamma_c) \in (-\infty, 1)^3$.*

Cada unidade de utilidade auferida no período $t \in \mathbb{N}$ é avaliada pelo indivíduo como equivalente a β^t unidades de utilidade auferida na data inicial $t' = 0$, em que $\beta \in (0,1)$. A hipótese $\beta > 0$ significa que o indivíduo valoriza seu bem estar futuro. A hipótese $\beta < 1$ significa que o indivíduo valoriza mais seu bem estar presente do que seu bem estar futuro. Como consequência do exposto, a utilidade do indivíduo na data inicial $t = 0$ é dada por

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u_t\left(l_{\cdot t}, z_{\cdot \mathsf{c}t}\right). \tag{10}$$

A quantidade de horas do tipo i disponível em cada período, por simplicidade, é uma característica física e não pode ser alterada: ela é constante ao longo do tempo e igual a $\bar{h}_i$. A dotação k_{it} de capital i, por outro lado, se deprecia a cada período: o montante k_{it} se transforma em $(1-\delta)k_{it}$ unidades de capital no próximo período, de forma que $\delta \in [0,1]$ denota a taxa de depreciação por período. Adicionalmente, o estoque k_{it} pode ser alterado pelo indivíduo por meio do seu investimento $z_{i\mathrm{k}t} \in \mathbb{R}$ em bem de capital i, de forma que a quantidade de capital i no próximo período é dado por $k_{i,t+1} = (1-\delta)k_{it} + z_{i\mathrm{k}t}/a^{\mathrm{k}}_i \geq 0$.

Cabe enfatizar que a figura de um agente representativo é um artifício que simplifica a modelagem de uma economia com vários indivíduos. Nesta economia com mais de um indivíduo, as decisões de consumo e produção são intermediadas por meio de um mecanismo de mercado. No período t, cada unidade de bem/serviço/capital $i \in \mathcal{B}$ é comprada no mercado sob um preço $P_{it} \geq 0$. Cada unidade de capital i alugada para a produção de bem j é remunerada por $R_{ijt} \geq 0$ unidades de conta. Cada uma das $h^s_{ijt} \geq 0$ horas tipo i empregadas na produção de bem/serviço j gera remuneração $W_{ijt} \geq 0$. Por fim, os indivíduos também recebem uma transferência agregada $\pi_t = \sum_{j\in\mathcal{B}} \pi_{jt} \geq 0$ pelo fato de serem os proprietários de todas as firmas. Com base no exposto, o mecanismo de mercado impõe a seguinte *restrição orçamentária* sobre a escolha $(z_{\cdot \mathtt{c}t}, z_{\cdot \mathtt{k}t}, l_{\cdot t}, h^s_{\cdot\cdot t}, k^s_{\cdot\cdot t})_{t=0}^{\infty}$ do indivíduo:

$$\sum_{i\in\mathcal{B}} (P_{it} z_{i\mathtt{c}t} + P_{it} z_{i\mathtt{k}t}) \le \sum_{j\in\mathcal{B}} \left(\sum_{i\in\mathcal{S}} W_{ijt} h^s_{ijt} + \sum_{i\in\mathcal{B}} R_{ijt} k^s_{ijt} \right) + \pi_t \tag{11}$$

Como consequência, o problema do agente representativo é dado por[2]

$$\max_{(l_{\cdot t}, z_{\cdot \mathtt{c}t}, z_{\cdot \mathtt{k}t}, h^s_{\cdot t}, k^s_{\cdot t})_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u_t\left(l_{\cdot t}, z_{\cdot \mathtt{c}t}\right) \tag{12}$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} \langle P_{\cdot t}, z_{\cdot \mathtt{c}t}\rangle + \langle P_{\cdot t}, z_{\cdot \mathtt{k}t}\rangle - \sum_{j\in\mathcal{B}} \left(\langle W_{\cdot jt}, h^s_{\cdot jt}\rangle + \langle R_{\cdot jt}, k^s_{\cdot jt}\rangle\right) - \pi_t \le 0, \quad \forall t \in \mathbb{N} \\ z_{i\mathtt{k}t}/a^{\mathtt{k}}_i = k_{i,t+1} - (1-\delta) k_{it} \\ h^s_{it} + l_{it} \le \bar{h}_i \\ k^s_{it} \le k_{it} \\ h^s_{it} = \sum_j h^s_{ijt} \text{ e } k^s_{it} = \sum_j k^s_{ijt} \\ (z_{\cdot \mathtt{c}t}, l_{\cdot t}) \in \mathbb{R}^{b+s}_+ \quad \text{e} \quad \left(k^s_{ijt}, h^s_{ijt}\right) \in \mathbb{R}^2_+ \text{ para cada } i \text{ e cada } j \\ k_{\cdot 0} \text{ dado.} \end{cases} \tag{13}$$

em que o *produto escalar* entre os vetores $W_{\cdot jt}$ e $h^s_{\cdot jt}$ é denotado por $\langle W_{\cdot jt}, h^s_{\cdot jt}\rangle \equiv \sum_i W_{it} h^s_{it}$ e se refere ao total de renda do trabalho obtida na linha de produção j. Similarmente, o *produto escalar* entre os vetores $R_{\cdot jt}$ e $k^s_{\cdot jt}$ é denotado por $\langle R_{\cdot jt}, k^s_{\cdot jt}\rangle \equiv \sum_i R_{it}, k^s_{it}$ e se refere ao total de renda do capital obtida na linha de produção j.

O comportamento previsto para a economia descrita acima, em que os indivíduos interagem por meio do mecanismo de mercado e são representados por um único agente, é determinado pelas forças de oferta e demanda que disciplinam o preço vigente em cada um dos mercados. Especificamente, são considerados previsões satisfatórias para o comportamento da economia somente aqueles comportamentos implicados por vetores de preços que induzem demanda agregada em cada mercado não superior a oferta agregada do bem correspondente[3]. No mercado de trabalho e no mercado de aluguel de capital, respectivamente, essa disciplina sobre os preços assume o formato

$$\sum_{j\in\mathcal{B}} h_{ijt} \;\le\; h^s_{it}, \qquad \forall i \in \mathcal{S} \tag{14}$$

$$\sum_{j\in\mathcal{B}} k_{ijt} \;\le\; k^s_{it}, \qquad \forall i \in \mathcal{B}. \tag{15}$$

No mercado em que o bem $i \in \mathcal{B}$ é vendido para o setor $j \in \mathcal{B}$ e para a população, tal disciplina se

[2]A utilização de um indivíduo como representativo de uma população com múltiplos indivíduos, na realidade, demanda uma estrutura de ativos bastante mais rica do que somente a possibilidade de poupança via bem de capital k_t presente no problema (12). Embora esta estrutura mais rica não seja relevante para a escolha do agente representativo, o que motiva mantê-la implícita no problema (12), a sua existência disciplina os preços de equilíbrio conforme discutido na demonstração do Lema 4.

[3]Para enfatizar a razoabilidade desta disciplina imposta ao vetor de preços, note que um vetor de preços que gera demanda superior a oferta em um dado mercado prevê que um dado recurso, o recurso transacionado neste mercado, será utilizado em montante superior à quantidade disponível deste recurso na economia.

traduz na condição

$$\sum_{j\in\mathcal{B}} z_{ijt} + z_{i\mathtt{c}t} + z_{i\mathtt{k}t} \le y_{it}, \qquad \forall i \in \mathcal{B}. \tag{16}$$

Definition 1. *Um equilíbrio competitivo é um par composto de uma sequência de preços* $\{Q_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ *e uma alocação* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$*, em que* $Q_t \equiv \left\{P_{jt}, (W_{ijt})_{i\in\mathcal{S}}, (R_{ijt})_{i\in\mathcal{B}}\right\}_{j\in\mathcal{B}}$ *e*

$$X_t \equiv \left(\{y_{jt}, (z_{ijt}, k_{ijt})_{i\in\mathcal{B}}, (h_{ijt})_{i\in\mathcal{S}}\}_{j\in\mathcal{B}}, (l_{it})_{i\in\mathcal{S}}, (z_{i\mathtt{c}t}, z_{i\mathtt{k}t})_{i\in\mathcal{B}}\right),$$

tais que

- *dadas a sequência* $\{Q_t\}$*, o vetor* $\{y_{jt}, (z_{ijt}, k_{ijt})_{i\in\mathcal{B}}, (h_{ijt})_{i\in\mathcal{S}}\}$ *resolve o problema (6),*
- *dada a sequência* $\{Q_t\}$*, o vetor* $\left(\{(k_{ijt})_{i\in\mathcal{B}}, (h_{ijt})_{i\in\mathcal{S}}\}_{j\in\mathcal{B}}, (l_{it})_{i\in\mathcal{S}}, (z_{i\mathtt{c}t}, z_{i\mathtt{k}t})_{i\in\mathcal{B}}\right)$ *resolve o problema (12),*
- X_t *satisfaz as condições de consistência entre oferta e demanda (14) a (16).*

Um equilíbrio competitivo $(\{Q_t\}_{t\in\mathbb{N}}, \{X_t\}_{t\in\mathbb{N}})$ *é dito estacionário se* Q_t *e* X_t *não dependem de* t*.*

2.1.1 Comportamento ótimo

Lemma 1. *As escolhas ótimas de insumos e fatores satisfazem*

$$z_{ij} = \left(\frac{\alpha_{ij}\tilde{P}_j/P_i}{(A_j^Z a_{ij}^z)^{\zeta_j}}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}} Z_j(z_{\cdot j}), \quad com \quad \tilde{P}_j \equiv \left(\sum_{n\in\mathcal{B}}\left(\frac{\alpha_{nj}}{(a_{nj}^z P_n)^{\zeta_j}}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}}\right)^{\frac{\zeta_j-1}{\zeta_j}} A_j^Z \tag{17}$$

$$k_{ij} = \left(\frac{\kappa_{ij}\tilde{R}_j/R_{ij}}{(A_j^K a_{ij}^k)^{\lambda_{kj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}} K_j(k_{\cdot j}) \quad com \quad \tilde{R}_j \equiv \left(\sum_{n\in\mathcal{B}}\left(\frac{\kappa_{nj}}{(a_{nj}^k R_{nj})^{\lambda_{kj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}}\right)^{\frac{\lambda_{kj}-1}{\lambda_{kj}}} A_j^K \tag{18}$$

$$h_{ij} = \left(\frac{\omega_{ij}\tilde{W}_j/W_{ij}}{(A_j^H a_{ij}^h)^{\lambda_{hj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}} H_j(h_{\cdot j}) \quad com \quad \tilde{W}_j \equiv \left(\sum_{n\in\mathcal{S}}\left(\frac{\omega_{nj}}{(a_{nj}^h W_{nj})^{\lambda_{hj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}}\right)^{\frac{\lambda_{hj}-1}{\lambda_{hj}}} A_j^H \tag{19}$$

Como consequência, o custo de aquisição de insumos e fatores pode ser reescrito como $\langle P_{\cdot j}, z_{\cdot j}\rangle = \tilde{P}_j Z_j$*,* $\langle R_{\cdot j}, k_{\cdot j}\rangle = \tilde{R}_j K_j$ *e* $\langle W_{\cdot j}, h_{\cdot j}\rangle = \tilde{W}_j H_j$*.*

Proof. Ver apêndice A. □

Os resultados estabelecidos no lema 1 mostram que as escolhas de $z_{\cdot j}$, $k_{\cdot j}$ e $h_{\cdot j}$ são determinadas pela escolha de $(Z_j, K_j, H_j) \in \mathbb{R}_+^3$. Isso permite escrever a função objetivo da firma j como uma função da escolha de $(Z_j, K_j, H_j, y_j) \in \mathbb{R}_+^{3+b}$. Especificamente, ela pode ser escrita como $\pi_j = P_j y_j - \tilde{P}_j Z_j - \tilde{R}_j K_j - \tilde{W}_j H_j$, em que $y_j = O_j(Z_j, F[K_j, H_j])$. Assim, o problema da empresa j pode ser especializado, sem perda de generalidade, para

$$\max_{(Z_j,K_j,H_j,y_{j\cdot})\in\mathbb{R}_+^{3+b}} \left\{P_j y_j - \tilde{P}_j Z_j - \tilde{R}_j K_j - \tilde{W}_j H_j\right\} \text{ sujeito a } \begin{cases} y_j = \sum_{i\in\{\mathtt{c},\mathtt{k}\}\cup\mathcal{B}} y_{ji} \\ y_j = O_j(Z_j, F_j[K_j, H_j]) \end{cases} \tag{20}$$

Lemma 2. *O vetor* $(Z_j, K_j, H_j, y_j) \in \mathbb{R}_+^{3+b}$ *é solução do problema (20) somente se*

$$K_j = \left(\frac{\theta_j \tilde{Q}_j}{(A_j^F)^{\rho_j} \tilde{R}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} F_j, \qquad H_j = \left(\frac{(1-\theta_j)\tilde{Q}_j}{(A_j^F)^{\rho_j} \tilde{W}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} F_j \tag{21}$$

$$Z_j = \left(\frac{\eta_j \tilde{C}_j}{(A_j)^{\sigma_j} \tilde{P}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} y_j, \qquad F_j = \left(\frac{(1-\eta_j)\tilde{C}_j}{(A_j)^{\sigma_j} \tilde{Q}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} y_j, \tag{22}$$

em que

$$\tilde{Q}_j \equiv \left(\left(\frac{\theta_j}{\tilde{R}_j^{\rho_j}}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} + \left(\frac{1-\theta_j}{\tilde{W}_j^{\rho_j}}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}\right)^{\frac{\rho_j - 1}{\rho_j}} A_j^F \tag{23}$$

e

$$\tilde{C}_j \equiv \left(\left[\frac{\eta_j}{\tilde{P}_j^{\sigma_j}}\right]^{\frac{1}{1-\sigma_j}} + \left[\frac{1-\eta_j}{\tilde{Q}_j^{\sigma_j}}\right]^{\frac{1}{1-\sigma_j}}\right)^{\frac{\sigma_j - 1}{\sigma_j}} A_j. \tag{24}$$

Assim, problema de maximização de lucro π_j *da firma* j *possui solução com nível de produção positivo e finito somente se o vetor de preços da economia* (P, R, W) *satisfaz*

$$P_j = \tilde{C}_j \left[\tilde{P}_j(P), \tilde{Q}_j\left(\tilde{R}_j(R), \tilde{W}_j(W)\right)\right], \tag{25}$$

Qualquer nível de produção $y_j \geq 0$ *é escolha ótima para a firma* j *sob (25), uma vez que todas elas implicam* $\pi_j = 0$.

Proof. Ver apêndice A. □

Conforme estabelecido nos lemas 1 e 2, o comportamento ótimo das firmas em equilíbrio impõe uma disciplina sobre os preços $\{P_j, R_{ij}, W_{ij}\}$ bastante forte: a condição (25). Trata-se de um sistema de b equações em $P = (P_1, P_2, \cdots, P_b)$ se as matrizes (R_{ij}) e (W_{ij}) são fixadas. O comportamento ótimo do agente representativo , por sua vez, implica em mais restrições sobre o comortamento dos preços. Usando que $R_{ijt} > 0$, tem-se que é ótimo escolher $k_{it} = k_{it}^s = \sum_j k_{ijt}^s$. Adicionalmente, para dado $\{k_{it}\}_{i,t}$, tem-se $k_{ijt}^s > 0$ somente se $R_{ijt} = \bar{R}_{it} \equiv \max_{n \in \mathcal{B}} R_{int}$. Ou seja, o agente representativo não se importa com a distribuição de capital i entre as firmas que oferecem a maior remuneração do trabalho. Assim, a renda do capital pode ser reescrita como $\sum_{j \in \mathcal{B}} \langle R_{\cdot jt}, k_{\cdot jt}^s \rangle = \sum_{i \in \mathcal{B}} \sum_{j \in \mathcal{B}} R_{ijt} k_{ijt}^s = \sum_{i \in \mathcal{B}} \bar{R}_{it} \sum_{j \in \mathcal{B}} k_{ijt}^s = \sum_{i \in \mathcal{B}} \bar{R}_{it} k_{it}^s = \sum_{i \in \mathcal{B}} \bar{R}_{it} k_{it}$. Similarmente, usando que $W_{ijt} > 0$, tem-se que é ótimo escolher $l_{it} = \bar{l}_i - h_{it}^s = \bar{l}_i - \sum_{i \in \mathcal{B}} h_{ijt}^s$ e $h_{ijt}^s > 0$ somente se $W_{ijt} = \bar{W}_{it} \equiv \max_{n \in \mathcal{S}} W_{int}$. Ou seja, o agente representativo não se importa com a distribuição de trabalho i entre as firmas que oferecem a maior remuneração do trabalho. Assim, a renda do trabalho pode ser reescrita como $\sum_{j \in \mathcal{B}} \langle W_{\cdot jt}, h_{\cdot jt}^s \rangle = \sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{j \in \mathcal{B}} W_{ijt} h_{ijt}^s = \sum_{i \in \mathcal{S}} \bar{W}_{it} \sum_{j \in \mathcal{B}} h_{ijt}^s = \sum_{i \in \mathcal{S}} \bar{W}_{it} h_{it}^s$.

Lemma 3. *O comportamento ótimo do agente representativo requer*

$$
\begin{aligned}
z_{ict} &= \left(\frac{\varphi_{ic}\hat{P}_t/P_{it}}{(a_i^c)^{\gamma_c}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}} C_t && (26)\\
h_{it}^s &= \begin{cases} 0 & se\ \hat{W}_{it}/\hat{P}_t \leq \left(\frac{\partial U}{\partial L}/\frac{\partial U}{\partial C}\right)\varphi_{il}[L_t/\bar{h}_i]^{1-\gamma_l} \\ \bar{h}_i - \left(\frac{\varphi_{il}\hat{W}_t/\bar{W}_{it}}{(a_i^l)^{\gamma_l}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_l}} L_t & se\ \hat{W}_{it}/\hat{P}_t > \left(\frac{\partial U}{\partial L}/\frac{\partial U}{\partial C}\right)\varphi_{il}[L_t/\bar{h}_i]^{1-\gamma_l} \end{cases} && (27)
\end{aligned}
$$

em que

$$
\hat{P}_t \equiv \left(\sum_{n\in\mathcal{B}}\left(\frac{\varphi_{nc}}{(a_n^c P_{nt})^{\gamma_c}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}}\right)^{\frac{\gamma_c-1}{\gamma_c}} \quad (28)
$$

$$
\hat{W}_t \equiv \left(\sum_{n\in\mathcal{S}}\left[\frac{\varphi_{nl}}{(a_n^l \bar{W}_{nt})^{\gamma_l}}\right]^{\frac{1}{1-\gamma_l}}\right)^{\frac{\gamma_l-1}{\gamma_l}} \quad (29)
$$

Proof. Ver apêndice A. □

Usando os resultados do lema 3, que $\pi_t = 0$ e $k_{it}^s = k_{it}$ para cada i, o problema do agente representativo pode ser especializado para

$$
\max_{(L_t,C_t,k_{i,t+1})_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(L_t, C_t) \quad (30)
$$

$$
\text{sujeito a} \begin{cases} \hat{P}_t C_t + \hat{W}_t L_t + \langle P_{\cdot t}, z_{\cdot \mathrm{k}t}\rangle - \langle \bar{W}_{\cdot t}, \bar{l}_\cdot\rangle - \langle \hat{R}_{\cdot t} k_{\cdot t}\rangle \leq 0, \quad \forall t \\ z_{i\mathrm{k}t}/a_i^{\mathrm{k}} = k_{i,t+1} - (1-\delta)k_{it} \\ (L_t, C_t) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \text{e} \quad k_{it} \geq 0 \text{ para cada } i \\ k_{\cdot 0} \text{ dado.} \end{cases} . \quad (31)
$$

Lemma 4. *A escolha ótima para* $\{L_t, C_t, (k_{i,t+1})_{i\in\mathcal{B}}\}_{t\in\mathbb{N}}$ *satisfaz*

$$
\begin{aligned}
\hat{P}_t C_t + \langle P_{\cdot t}, z_{\cdot \mathrm{k}t}\rangle &= \langle \bar{W}_{\cdot t}, \bar{h}_\cdot\rangle - L_t \hat{W}_t + \sum_{i\in\mathcal{B}} \hat{R}_{it} k_{it} && (32)\\
\frac{\partial U/\partial L_t}{\partial U/\partial C_t} &= \frac{\hat{W}_t}{\hat{P}_t} && (33)\\
\beta\frac{\partial U/\partial C_{t+1}}{\partial U/\partial C_t}\left[1-\delta+\frac{\hat{R}_{i,t+1}}{P_{i,t+1}a_i^{\mathrm{k}}}\right] &\leq \frac{P_{it}/\hat{P}_t}{P_{i,t+1}/\hat{P}_{t+1}} \qquad \forall i\in\mathcal{B} && (34)
\end{aligned}
$$

em que, para cada $i \in \mathcal{B}$, a desigualdade (34) é válida com igualdade se $k_{i,t+1} > 0$.

Proof. Seja $\beta^t\mu_t \geq 0$ o multiplicador de Lagrange associado à restrição orçamentária. Assim, o Lagrangeano associado ao problema (30 - 31) é

$$
\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[U(L_t, C_t) - \mu_t\left(\hat{P}_t C_t + \hat{W}_t L_t + \langle P_{\cdot t}, z_{\cdot \mathrm{k}t}\rangle - \langle \bar{W}_{\cdot t}, \bar{h}_\cdot\rangle - \langle \hat{R}_{\cdot t} k_{\cdot t}\rangle\right)\right]
$$

em que $z_{ikt} = a_i^k(k_{i,t+1} - (1-\delta)k_{it})$. A escolha ótima de $(L_t, C_t, k_{\cdot,t+1})$ precisa satisfazer as seguintes condições de Kuhn-Tucker

$$\frac{\partial U}{\partial C_t} - \mu_t \hat{P}_t \leq 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial C_t} - \mu_t \hat{P}_t\right) C_t = 0 \tag{35}$$

$$\frac{\partial U}{\partial L_t} - \mu_t \hat{W}_t \leq 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial L_t} - \mu_t \hat{W}_t\right) L_t = 0 \tag{36}$$

$$\beta\mu_{t+1}\left[1 - \delta + \frac{\hat{R}_{i,t+1}}{P_{i,t+1}a_i^k}\right] - \mu_t \frac{P_{it}}{P_{i,t+1}} \leq 0 = \left(\beta\mu_{t+1}\left[1 - \delta + \frac{\hat{R}_{i,t+1}}{P_{i,t+1}a_i^k}\right] - \mu_t \frac{P_{it}}{P_{i,t+1}}\right) k_{i,t+1} \tag{37}$$

Usando $\nu \in (0,1)$, tem-se que $\frac{\partial U}{\partial C_t} \to \infty$ quando $C_t \to 0$ e $\frac{\partial U}{\partial L_t} \to \infty$ quando $L_t \to 0$. Então, a solução ótima requer $L_t > 0$ e $C_t > 0$, de forma que $\mu_t = \frac{\partial U}{\partial C_t}/\hat{P}_t$ segue de (35). Usando este resultado na igualdade de (36) e em (37), obtém-se as condições (33) e (34). □

2.2 Uma economia intersetorial com governo

Suponha que os habitantes da economia descrita na seção 2.1 decidiram organizar parte das decisões alocativas (decisões de produção, consumo e investimento) da economia em um mecanismo alternativo ao sistema de mercado, o qual foi denominado de *governo*.

Nesta nova economia, um subconjunto $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}$ das linhas de produção de bens e serviços é gerenciado por este mecanismo governamental e a produção resultante é ofertada gratuitamente para consumo final da população e para investimento em capital *estatal*, cujos serviços são utilizados gratuitamente. Obviamente, a produção desses bens e serviços governamentais consome recursos reais, o que revela a necessidade de uma fonte de receita suficientemente grande para cobrir tais custos de produção. O referido mecanismo governamental adquire tal receita por meio do *confisco* de parte da produção executada pelas firmas competitivas. Este sistema de confisco é denominado de *sistema tributário*. A tabela 3 a seguir ilustra esquematicamente a organização dessa nova economia por meio de sua Matriz de Contabilidade Social, a qual é obtida a partir da tabela 2, após a inclusão da presença do governo.

O confisco de produção das firmas competitivas pode ocorrer diretamente na linha de produção $i \in \mathcal{B}$, no montante t_i, ou indiretamente via tributação do consumo t_c e do investimento t_k. Tais fluxos de tributação são apresentados na tabela 3 na linha denominada *Tributo* e totalizam a arrecadação T. A atividade produtiva do governo é mantida implícita na tabela 3, sob o entendimento de que algumas atividades do conjunto $\mathcal{B}$ são agora desempenhadas pelo governo. Os fluxos de bens e serviços resultantes das decisões de consumo e investimento governamentais são apresentadas explicitamente na tabela 3, nas colunas G e I_g, respectivamente. O gasto total com consumo governamental é dado por $\langle P, z_{\cdot g}\rangle$. O gasto total com investimento governamental é dado por $\langle P, z_{\cdot gk}\rangle$. O denominado *superávit orçamentário* do governo é dado por $T - \langle P, z_{\cdot g}\rangle - \langle P, z_{\cdot gk}\rangle$.

Enquanto a produção executada por empresas competitivas, denominada produção *privada*, é escolhida a fim de maximizar o lucro da empresa, a produção governamental é determinada pelo orçamento G_j e pelo montante de capital estatal k_j^g disponibilizados para a linha de produção em questão. Especificamente, o objetivo da atividade produtiva governamental é maximizar a quantidade y_j produzida de cada bem/serviço governamental $j \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}$ sujeito a um orçamento $G_j = P_j z_{jg}$ previamente definido

		Linha de produção				População		Governo		Total
		1	2	$\cdots$	b	C	I	G	I_{g}	
Bem/serviço	1	$P_1 z_{11}$	$P_1 z_{12}$	$\cdots$	$P_1 z_{1b}$	$P_1 z_{1\mathsf{c}}$	$P_1 z_{1\mathsf{k}}$	$P_1 z_{1\mathsf{g}}$	$P_1 z_{1\mathsf{gk}}$	Y_1
	2	$P_2 z_{21}$	$P_2 z_{22}$	$\cdots$	$P_2 z_{2b}$	$P_2 z_{2\mathsf{c}}$	$P_2 z_{2\mathsf{k}}$	$P_2 z_{2\mathsf{g}}$	$P_2 z_{2\mathsf{gk}}$	Y_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	b	$P_b z_{b1}$	$P_b z_{b2}$	$\cdots$	$P_b z_{bb}$	$P_b z_{b\mathsf{c}}$	$P_b z_{b\mathsf{k}}$	$P_2 z_{2\mathsf{g}}$	$P_2 z_{2\mathsf{gk}}$	Y_b
Capital	1	$R_{11} k_{11}$	$R_{12} k_{12}$	$\cdots$	$R_{1b} k_{1b}$					K_1
	2	$R_{21} k_{21}$	$R_{22} k_{22}$	$\cdots$	$R_{2b} k_{2b}$					K_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$					$\vdots$
	b	$R_{b1} k_{b1}$	$R_{b2} k_{b2}$	$\cdots$	$R_{bb} k_{bb}$					K_b
Trabalho	1	$W_{11} h_{11}$	$W_{12} h_{12}$	$\cdots$	$W_{1b} h_{1b}$					H_1
	2	$W_{21} h_{21}$	$W_{22} h_{22}$	$\cdots$	$W_{2b} h_{2b}$					H_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$					$\vdots$
	s	$W_{s1} h_{s1}$	$W_{s2} k_{s2}$	$\cdots$	$W_{sb} h_{sb}$					H_s
Tributo		t_1	t_2	$\cdots$	t_b	t_{c}	t_{k}			T
Lucro		π_1	π_2	$\cdots$	π_b					Π
Total		Y_1	Y_2	$\cdots$	Y_b	$t_{\mathsf{c}}+ \langle P, z_{\cdot\mathsf{c}}\rangle$	$t_{\mathsf{k}}+ \langle P, z_{\cdot\mathsf{k}}\rangle$	$\langle P, z_{\cdot\mathsf{g}}\rangle$	$\langle P, z_{\cdot\mathsf{gk}}\rangle$	

Table 3: Matriz de Contabilidade Social com governo

para esta linha de produção j. Com isso, o problema resolvido pela atividade produtiva governamental na linha de produção $j \in \mathcal{G}$ pode ser escrita compactamente como

$$\max_{(y_j, z_{\cdot j}, h_{\cdot j}, x_{\cdot j})} \Big\{ y_j \Big\} \qquad \text{sujeito a} \begin{cases} y_j \leq O_j \Big(Z_j\left(z_{\cdot j}\right), F_j\left[K_j\left(x_{\cdot j}\right), H_j\left(h_{\cdot j}\right)\right] \Big) \\ \langle P, z_{\cdot j}\rangle + \langle W, h_{\cdot j}\rangle + \left\langle R^{\mathsf{g}}_{\cdot j}, x_{\cdot j}\right\rangle \leq G_j \\ x_{\cdot j} \leq k^{\mathsf{g}}_{\cdot j} \end{cases} \tag{38}$$

em que R^{g}_{ij} é a remuneração (implícita) do capital governamental tipo i na linha de produção governamental j. Note que $P^{\mathsf{g}}_j \equiv G_j / \bar{y}_j(G_j, k^{\mathsf{g}}_{\cdot j})$ pode ser visto como o preço pago (implicitamente) pelo governo para sua linha de produção j por cada unidade de bem/serviço j.

Hipótese 3. *A remuneração $R^{\mathsf{g}}_{\cdot j}$ é (implicitamente) escolhida pelo governo de forma que a escolha ótima de capital tipo i da linha de produção j seja dada exatamente por $x_{ij} = k^{\mathsf{g}}_{ij}$.*

Como ilustração dessa hipótese comportamental para a atividade produtiva do governo, considere que a linha de produção $i \in \mathcal{G}$ corresponde à produção de *serviços de educação pública*. A quantidade/qualidade de serviço de educação é determinada pelo orçamento G_j e pelo montante de estruturas e equipamentos (capital $k^{\mathsf{g}}_{\cdot j}$) disponibilizados pela sociedade para este fim. Neste caso, o problema (38) utiliza como hipótese que a atividade produtiva governamental na produção de serviços de educação pública busca ofertar/disponibilizar para a população o máximo nível de educação pública viabilizado pelo orçamento G_j e pelo estoque de capital estatal dedicado à educação pública, $k^{\mathsf{g}}_{\cdot j}$.

Lemma 5. *Usando as funções $\tilde{P}_j$, $\tilde{R}_j$, $\tilde{W}_j$, $\tilde{Q}_j$ e $\tilde{C}_j$ definidas em (17), (18), (19), (23) e (24) respectivamente, defina $\tilde{R}^{\mathsf{g}}_j \equiv \tilde{R}_j\left(R^{\mathsf{g}}_{\cdot j}\right)$, $\tilde{Q}^{\mathsf{g}}_j \equiv \tilde{Q}_j\left(\tilde{R}^{\mathsf{g}}_{\cdot j}, \tilde{W}_j\right)$ e $\tilde{C}^{\mathsf{g}}_j \equiv \tilde{C}_j\left(\tilde{P}_j, \tilde{Q}^{\mathsf{g}}_j\right)$. Então, a escolha ótima da atividade produtiva governamental $j \in \mathcal{G}$ satisfaz*

$$\frac{z_{ij}}{Z_j} = \left(\frac{\alpha_{ij}\tilde{P}_j/P_i}{\left(A^Z_j a^z_{ij}\right)^{\zeta_j}}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}}, \quad \frac{h_{ijt}}{H_j} = \left(\frac{\omega_{ij}\tilde{W}_j/W_{ij}}{\left(A^H_j a^h_{ij}\right)^{\lambda_{hj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}}, \quad \frac{x_{ij}}{K_j} = \left(\frac{\kappa_{ij}\tilde{R}^{\mathsf{g}}_{jt}/R^{\mathsf{g}}_{ijt}}{\left(A^K_j a^k_{ij}\right)^{\lambda_{kj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}}, \tag{39}$$

em que os índices agregados de fatores e insumos são dados por

$$K_j = \left(\frac{\theta_j\tilde{Q}^{\mathsf{g}}_j/\tilde{R}^{\mathsf{g}}_j}{(A^F_j)^{\rho_j}}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} F_j, \qquad H_j = \left(\frac{(1-\theta_j)\tilde{Q}^{\mathsf{g}}_j/\tilde{W}_j}{(A^F_j)^{\rho_j}}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} F_j \tag{40}$$

$$F_j = \left(\frac{(1-\eta_j)\tilde{C}^{\mathsf{g}}_j/\tilde{Q}^{\mathsf{g}}_j}{(A_j)^{\sigma_j}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} y_j, \quad Z_j = \left(\frac{\eta_j\tilde{C}^{\mathsf{g}}_j/\tilde{P}_j}{(A_j)^{\sigma_j}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} y_j. \tag{41}$$

Como consequência, $G_j = \tilde{C}^{\mathsf{g}}_j y_j$ e, portanto, $P^{\mathsf{g}}_j = \tilde{C}^{\mathsf{g}}_j$.

Proof. Note que a hipótese 3 permite ignorar, sem perda de generalidade, a restrição $x_{ij} \leq k^g_{ij}$ ao resolver o problema (38). O Lagrangeano associado ao problema relaxado assim obtido é dado por

$$O_j\Big(Z_j\left(z_{\cdot j}\right), F_j\left[K_j\left(x_{\cdot j}\right), H_j\left(h_{\cdot j}\right)\right]\Big) - \mu_j\left(\langle P, z_{\cdot j}\rangle + \langle W, h_{\cdot j}\rangle + \left\langle R^{\mathsf{g}}_{\cdot j}, x_{\cdot j}\right\rangle - G_j\right) \tag{42}$$

se $\mu_j \geq 0$ denota o multiplicado de Lagrange associado a restrição orçamentária da linha de produção j. Observe que as condições de primeira ordem obtidas a partir do Lagrangeano (42) coincidem com (64), (65) e (66) se $\mu_j = 1/P_j$, $x_{ij} = k_{ij}$ e $R^{\mathsf{g}}_{ij} = R_{ij}$. Assim como a demonstração das condições (17), (18) e (19) estabelecidas no lema 1 não depende do valor exato do preço de venda P_j, a demonstração de (39) não depende do valor exato de μ_j. Nos dois casos, basta que a respectiva variável seja estritamente positiva. Como conclusão dessas observações, as igualdades em (39) podem ser obtidas com uma demonstração idêntica àquela utilizada no lema 1 para estabelecer (17), (18) e (19). Basta trocar P_j por $1/\mu_j$, k_{ij} por x_{ij} e R_{ij} por R^{g}_{ij}. ☐

Conforme antecipado, a produção de bens e serviços governamentais $(y_j)_{j\in\mathcal{G}}$ é disponibilizada para a população gratuitamente. Por simplicidade, é suposto que o consumo de bens e serviços governamentais eleva a utilidade do agente representativo, mas não afeta a utilidade marginal do consumo de bens e serviços privados, conforme registrado na hipótese 4.

Hipótese 4. *Para cada $j \in \mathcal{G}$, $\varphi_{j\mathsf{c}} = 0$. Ainda, o intercepto Γ_t da utilidade definida em (8) é determinado pela oferta/disponibilização em t de bens e serviços governamentais $z_{\cdot\mathsf{g}t} = \{z_{j\mathsf{g}t}\}_{j\in\mathcal{G}}$ da* *seguinte forma*

$$\Gamma_t = G\left(z_{\cdot \mathrm{g}t}\right) \equiv \left(\sum_{i \in \mathcal{G}} \varphi_{i\mathrm{g}} \left(z_{i\mathrm{g}t}/a^{\mathrm{g}}_i\right)^{\gamma_\mathrm{g}}\right)^{\frac{1}{\gamma_\mathrm{g}}}. \tag{43}$$

em que $\gamma_\mathrm{g} \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, $\sum_{i \in \mathcal{G}} \varphi_{i\mathrm{g}} = 1$ *e* $\varphi_{i\mathrm{g}} \geq 0$ *para cada* $i \in \mathcal{G}$.

O mecanismo governamental é *benevolente*, no sentido de que a escolha ótima para $\Big(z_{\cdot \mathrm{g}t}, z_{\cdot \mathrm{gk}t}, k^{\mathrm{g}}_{\cdot t+1}, \big(y^{\mathrm{g}}_{jt}, z^{\mathrm{g}}_{\cdot jt}, k$ busca maximizar o bem estar da população (do agente representativo). Concretamente, a escolha ótima do governo maximiza (43) sujeito a arrecadação tributária $\{T_t\}$ e ao capital estatal inicial $k^{\mathrm{g}}_{\cdot 0}$. É exatamente esta hipótese que motiva a maximização de produção assumida no problema (38). Devido a estrutura de preferência e tecnologia assumida para o setor governamental, o problema de escolha de consumo e investimento governamentais pode ser escrito como

$$\max_{\left(z_{\cdot \mathrm{g}t}, z_{\cdot \mathrm{gk}t}, k^{\mathrm{g}}_{\cdot t+1}, \left(k^{\mathrm{g}}_{\cdot jt}\right)_{j \in \mathcal{G}}\right)_{t \in \mathbb{N}}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t G(z_{\cdot \mathrm{g}t}) \tag{44}$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} \langle P^{\mathrm{g}}, z_{\cdot \mathrm{g}t} \rangle + \langle P^{\mathrm{g}}, z_{\cdot \mathrm{gk}t} \rangle \leq T_t + \sum_{j \in \mathcal{G}} \left\langle R^{g}_{\cdot jt}, k^{\mathrm{g}}_{\cdot jt} \right\rangle, & \forall t \in \mathbb{N} \\ k^{\mathrm{g}}_{i,t+1} = z_{i\mathrm{gk}t}/a^{\mathrm{gk}}_i + (1-\delta) k^{\mathrm{g}}_{it}, & \forall t \in \mathbb{N} \\ \sum_{j \in \mathcal{G}} k^{\mathrm{g}}_{ijt} \leq k^{\mathrm{g}}_{it}, & \forall t \in \mathbb{N} \\ k^{\mathrm{g}}_{i0} \geq 0 \text{ dado.} \end{cases} \tag{45}$$

Lemma 6. *Para cada* $i \in \mathcal{B}$, *defina* $\bar{R}^g_{it} \equiv \max_n R^g_{nt}$. *A escolha ótima de consumo, investimento e oferta de capital governamentais satisfaz*

$$\hat{P}^{\mathrm{g}} G_t + \sum_{i \in \mathcal{B}} P^{\mathrm{g}}_i a^{\mathrm{gk}}_i [k^{\mathrm{g}}_{i,t+1} - (1-\delta) k^{\mathrm{g}}_{it}] = T_t + \sum_i \bar{R}^g_{it} k^{\mathrm{g}}_{it} \tag{46}$$

$$z_{i\mathrm{g}t} = \left(\frac{\varphi_{i\mathrm{g}} \hat{P}^{\mathrm{g}}_t / P^{\mathrm{g}}_{it}}{(a^{\mathrm{g}}_i)^{\gamma_\mathrm{g}}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_\mathrm{g}}} G_t \tag{47}$$

$$\beta \frac{\partial G / \partial z_{i\mathrm{g}t+1}}{\partial G / \partial z_{i\mathrm{g}t}} \left(1 - \delta + \frac{R^{\mathrm{g}}_{i,t+1}}{P_{i,t+1} a^{\mathrm{gk}}_i}\right) \leq \frac{P_{it}/P^{\mathrm{g}}_t}{P_{i,t+1}/P^{\mathrm{g}}_{t+1}} \tag{48}$$

em que a desigualdade é satisfeita com igualdade se $k^{\mathrm{g}}_{i,t+1} > 0$ *e*

$$\hat{P}^{\mathrm{g}}_t \equiv \left(\sum_{n \in \mathcal{B}} \left(\frac{\varphi_{n\mathrm{g}}}{(a^{\mathrm{g}}_n P^{\mathrm{g}}_{nt})^{\gamma_\mathrm{g}}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_\mathrm{g}}}\right)^{\frac{\gamma_\mathrm{g}-1}{\gamma_\mathrm{g}}} \tag{49}$$

Proof. Note inicialmente que o problema (44) é matematicamente bastante similar ao problema (12). A única diferença essencial reside no fato de que o governo não possui escolhas de oferta de trabalho e de consumo de lazer. De fato, nos dois problemas são escolhidas trajetórias de consumo, investimento e oferta de horas de capital sujeitos a uma restrição orçamentária e uma lei de movimento do capital, a qual é controlada pelo nível de investimento. Assim, as demonstrações dos lemas 3 e 4 podem ser facilmente adaptadas para demonstrar a necessidade das condições de otimalidade (46), (47) e (48). □

Os preços R^{g}_{ijt} e P^{g}_{jt} são definidos implicitamente, tendo em vista que não existe de fato um mercado mediando as relações entre as linhas de produção governamentais e o restante do governo. Matematicamente, estes preços definem os multiplicadores de Lagrange (preço sombra) da restrição orçamentária do governo e da restrição de capital tipo i na linha de produção j, respectivamente. Conforme discutido anteriormente, o preço $R_{ijt}^{\mathtt{g}}$ é definido implicitamente de forma que $x_{ijt} = k_{ij}^{\mathtt{g}}$. Já o preço $P_{jt}^{\mathtt{g}}$ é definido implicitamente de forma que $z_{j\mathtt{g}t} = y_j$.

Suponha que a obrigação tributária t_j seja composta de dois termos, se $j \in \mathcal{B}$. Um dos componentes é proporcional a receita $P_j y_j$ obtida com a venda da produção y_j. O outro componente é, por sua vez, composto de b termos: o i-ésimo termo deste componente é proporcional ao custo $P_i z_{ij}$ incorrido na compra do insumo z_{ij}. O primeiro componente é a obrigação tributária *bruta* da atividade j e o segundo componente é o montante total de créditos tributários da atividade j, de forma que $t_j = \tau_j P_j y_j - \sum_{i=1}^{b} \phi_{ij} P_i z_{ij}$. Neste caso, o excedente do produtor de bem j pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\pi_j &\equiv P_j y_j - \langle P_{\cdot j}, z_{\cdot j}\rangle - \langle R_{\cdot j}, k_{\cdot j}\rangle - \langle W_{\cdot j}, h_{\cdot j}\rangle - t_j \\
&= (1-\tau_j) P_j y_j - \sum_{i\in\mathcal{B}} (1-\phi_{ij})\, P_i z_{ij} - \langle R_{\cdot j}, k_{\cdot j}\rangle - \langle W_{\cdot j}, h_{\cdot j}\rangle \\
&= p_j y_j - \sum_{i\in\mathcal{B}} p_{ij} z_{ij} - \langle R_{\cdot j}, k_{\cdot j}\rangle - \langle W_{\cdot j}, h_{\cdot j}\rangle = p_j y_j - \langle p_{\cdot j}, z_{\cdot j}\rangle - \langle R_{\cdot j}, k_{\cdot j}\rangle - \langle W_{\cdot j}, h_{\cdot j}\rangle
\end{aligned}$$

em que $p_j \equiv (1-\tau_j)P_j$ denota o preço ao produtor j e $p_{ij} \equiv (1-\phi_{ij})\, P_i$ denota o preço do bem i ao consumidor j. Com isso, representado de forma compacta, o problema da empresa j é dado por

$$\max_{(z_{\cdot j}, k_{\cdot j}, h_{\cdot j}, y_{j\cdot}) \in \mathbb{R}_+^{s+3b}} \left\{ p_j y_j - \sum_{i\in\mathcal{B}} p_{ij} z_{ij} - \langle R_{\cdot j}, k_{\cdot j}\rangle - \langle W_{\cdot j}, h_{\cdot j}\rangle \right\} \tag{50}$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} y_j = \sum_{i\in\{\mathtt{c},\mathtt{k}\}\cup\mathcal{B}} y_{ji} \\ y_j = O_j\left(Z_j(z_{\cdot j}), F_j\left[K_j(k_{\cdot j}), H_j(h_{\cdot j})\right]\right) \\ p_j \equiv (1-\tau_j) P_j \\ p_{ij} \equiv (1-\phi_{ij})\, P_i \end{cases} \tag{51}$$

Observe que este problema é bastante semelhante ao problema (6). A única diferença em relação ao problema (6) reside no fato de que o preço da produção P_j foi substituído pelo preço ao produtor p_j e o preço P_i, preço do insumo i para a linha de produção j, foi substituído pelo preço ao comprador p_{ij}. Ou seja, a presença de uma estrutura tributária linear na receita de vendas e no gasto com insumos altera o problema resolvido pelo setor produtivo somente por meio da criação de uma cunha entre o preço pago pelos compradores do bem/serviço (receita unitária bruta) e o preço recebido pelos ofertantes (receita unitária líquida). Dessa forma o lema a seguir é consequência direta dos lemas 1 e 2.

Lemma 7. *Defina $p_j \equiv (1-\tau_j)P_j$ e $p_{ij} \equiv (1-\phi_{ij})\, P_i$. As escolhas ótimas de insumos e fatores* *satisfazem*

$$z_{ij} = \left(\frac{\alpha_{ij}\tilde{p}_j/p_{ij}}{\left(A_j^Z a_{ij}^z\right)^{\zeta_j}}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}} Z_j(z_{\cdot j}), \quad com \quad \tilde{p}_j \equiv \left(\sum_{n\in\mathcal{B}}\left(\frac{\alpha_{nj}}{\left(a_{nj}^z p_{nj}\right)^{\zeta_j}}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}}\right)^{\frac{\zeta_j-1}{\zeta_j}} A_j^Z \tag{52}$$

$$k_{ij} = \left(\frac{\kappa_{ij}\tilde{R}_j/R_{ij}}{\left(A_j^K a_{ij}^k\right)^{\lambda_{kj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}} K_j(k_{\cdot j}) \quad e \quad h_{ij} = \left(\frac{\omega_{ij}\tilde{W}_j/W_{ij}}{\left(A_j^H a_{ij}^h\right)^{\lambda_{hj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}} H_j(h_{\cdot j}) \tag{53}$$

em que $\tilde{R}_j$ *e* $\tilde{W}_j$ *ainda são definidos, respectivamente, em (18) e (19). Como consequência, o custo de aquisição de insumos e fatores pode ser reescrito como* $\langle p_{\cdot j}, z_{\cdot j}\rangle = \tilde{p}_j Z_j$, $\langle R_{\cdot j}, k_{\cdot j}\rangle = \tilde{R}_j K_j$ *e* $\langle W_{\cdot j}, h_{\cdot j}\rangle = \tilde{W}_j H_j$, *em que o vetor* $(Z_j, K_j, H_j, y_j) \in \mathbb{R}_+^{3+b}$ *satisfaz*

$$Z_j = \left(\frac{\eta_j\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{p}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} y_j, \qquad F_j = \left(\frac{(1-\eta_j)\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{Q}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} y_j, \tag{54}$$

$$K_j = \left(\frac{\theta_j\tilde{Q}_j}{(A_j^F)^{\rho_j}\tilde{R}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} F_j, \qquad H_j = \left(\frac{(1-\theta_j)\tilde{Q}_j}{(A_j^F)^{\rho_j}\tilde{W}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} F_j, \tag{55}$$

com $\tilde{Q}_j$ *ainda é definido em (23) e*

$$\tilde{c}_j \equiv \left(\left[\frac{\eta_j}{\tilde{p}_j^{\sigma_j}}\right]^{\frac{1}{1-\sigma_j}} + \left[\frac{1-\eta_j}{\tilde{Q}_j^{\sigma_j}}\right]^{\frac{1}{1-\sigma_j}}\right)^{\frac{\sigma_j-1}{\sigma_j}} A_j. \tag{56}$$

Assim, problema de maximização de lucro π_j *da firma* j *possui solução com nível de produção positivo e finito somente se o vetor de preços da economia* (P, R, W) *e a estrutura tributária* (τ, ϕ) *satisfazem*

$$p_j = \tilde{c}_j\left[\tilde{p}_j\left(p_{\cdot\cdot}\right), \tilde{Q}_j\left(\tilde{R}_j\left(R\right), \tilde{W}_j\left(W\right)\right)\right]. \tag{57}$$

Qualquer nível de produção $y_j \geq 0$ *é escolha ótima para a firma* j *sob (57), uma vez que todas elas implicam* $\pi_j = 0$.

Proof. Com a definição $p_j = (1-\tau_j)P_j$ para o preço da produção y_j e $p_{ij} = (1-\phi_{ij})\,P_i$ para os insumos, a demonstração é idêntica àquela apresentada para os lemas 1 e 2, trocando o preço da produção P_j por p_j e o preço do insumo i para a linha de produção j, preço P_i, por p_{ij}, além da natural e consequente substituição de $\tilde{P}_j$ por $\tilde{p}_j$. □

Tratando agora do problema resolvido pela população sob a presença do governo, suponha por simplicidade que não são recolhidos tributos diretamente da população (ou seja, que $t_{\mathtt{c}} = t_{\mathtt{k}} = 0$). Neste caso, note que (i) a separabilidade entre $\Gamma_t = G(\cdot)$ e $(L(\cdot), C(\cdot))$ em (8) e (ii) a hipótese de que os bens governamentais são disponibilizados gratuitamente para a população, após serem escolhidos centralmente pelo governo, garantem que o problema a ser resolvido pelo agente representativo nesta nova economia ainda é dado por (12). Assim, a escolha da população pode ser novamente descrita pelos lemas 3 e 4. Como consequência, o consumo e investimento privados podem ser afetados pela presença do governo na economia somente *indiretamente*, por meio da modificação dos preços relativos da economia.

A receita obtida pela estrutura (τ, ϕ) que com $t_j = \tau_j P_j y_j - \sum_{i=1}^{b} \phi_{ij} P_i z_{ij}$ para $j \in \mathcal{B} \backslash \mathcal{G}$ e $t_{\mathtt{c}} = t_{\mathtt{k}} = 0$ é, portanto, dada por

$$T_t = \sum_{j \in \mathcal{B} \backslash \mathcal{G}} \left(\tau_j P_j y_j - \sum_{i \in \mathcal{B}} \phi_{ij} P_i z_{ij} \right). \tag{58}$$

O comportamento previsto para esta nova economia, em que parte das decisões alocativas (de produção, consumo e investimento) é decidida centralmente pelo governo e as demais decisões são tomadas de forma descentralizada e conciliadas por meio do mecanismo de mercado, é determinado pelas forças de oferta e demanda que disciplinam o preço vigente em cada um dos mercados. Especificamente, são considerados previsões satisfatórias para o comportamento da economia somente aqueles comportamentos implicados por vetores de preços que induzem demanda agregada em cada mercado não superior a oferta agregada do bem correspondente. Especificamente,

$$\sum_{j \in \mathcal{B}} h_{ijt} \leq h_{it}^{s}, \qquad \forall i \in \mathcal{S} \tag{59}$$

$$\sum_{j \in \mathcal{B}} k_{ijt} \leq k_{it}^{s}, \qquad \forall i \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{G}. \tag{60}$$

$$\sum_{j \in \mathcal{B}} x_{ijt} \leq k_{it}^{\mathtt{g}}, \qquad \forall i \in \mathcal{G}. \tag{61}$$

$$(z_{i\mathtt{c}t} + z_{i\mathtt{k}t}) + (z_{i\mathtt{g}t} + z_{i\mathtt{gk}t}) + \sum_{j \in \mathcal{B}} z_{ijt} \leq y_{it}, \qquad \forall i \in \mathcal{B}. \tag{62}$$

Definition 2. *Dada uma estrutura tributária $\{\tau, \phi\}$, um equilíbrio competitivo para a economia intersetorial com governo é um par composto de uma sequência de preços $\{Q_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ e uma alocação $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, em que $Q_t \equiv \left\{P_{jt}, (W_{ijt})_{i \in \mathcal{S}}, (R_{ijt})_{i \in \mathcal{B}}\right\}_{j \in \mathcal{B}}$ e*

$$X_t \equiv \left(\left\{ y_{jt}, (z_{ijt}, k_{ijt})_{i \in \mathcal{B}}, (h_{ijt})_{i \in \mathcal{S}} \right\}_{j \in \mathcal{B}}, (l_{it})_{i \in \mathcal{S}}, (z_{i\mathtt{c}t}, z_{i\mathtt{k}t}, z_{i\mathtt{g}t}, z_{i\mathtt{gk}t})_{i \in \mathcal{B}}, T_t \right),$$

tais que satisfazem

- *dada a sequência $\{Q_t\}$, o vetor $\left(\left\{ (k_{ijt})_{i \in \mathcal{B}}, (h_{ijt})_{i \in \mathcal{S}} \right\}_{j \in \mathcal{B}}, (l_{it})_{i \in \mathcal{S}}, (z_{i\mathtt{c}t}, z_{i\mathtt{k}t})_{i \in \mathcal{B}} \right)_{t \in \mathbb{N}}$ resolve o problema (12),*

- *dada a sequência $\{Q_t\}$, para cada $j \in \mathcal{B} \backslash \mathcal{G}$, o vetor $\{y_{jt}, (z_{ijt}, k_{ijt})_{i \in \mathcal{B}}, (h_{ijt})_{i \in \mathcal{S}}\}$ resolve o problema (50),*

- *dada a sequência $\{Q_t\}$, para cada $j \in \mathcal{G}$, o vetor $\{y_{jt}, (z_{ijt}, x_{ijt})_{i \in \mathcal{B}}, (h_{ijt})_{i \in \mathcal{S}}\}$ resolve o problema (38),*

- *dada as sequências $\{Q_t\}$ e $\{T_t\}$, o vetor $\left(z_{\cdot \mathtt{g}t}, z_{\cdot \mathtt{gk}t}, k_{\cdot t+1}^{\mathtt{g}}, \left(k_{\cdot jt}^{\mathtt{g}}\right)_{j \in \mathcal{G}} \right)_{t \in \mathbb{N}}$ resolve o problema (44),*

- *as sequências de preços $\{Q_t\}$ e de arrecadação $\{T_t\}$ satisfazem a condição (58)*

- *X_t satisfaz as condições de consistência entre oferta e demanda (59) a (62), assim como $x_{ijt} = k^{\mathrm{g}}_{ijt}$ e $y_{jt} = z_{j\mathrm{g}t}$.*

Um equilíbrio competitivo $(\{Q_t\}_{t\in\mathbb{N}}, \{X_t\}_{t\in\mathbb{N}})$ é dito estacionário se Q_t e X_t não dependem de t.

3 Resultados

Esta seção apresenta resultados de exercícios de simulação de reformas tributárias. O objetivo principal é ilustrar o tipo de informação gerada pela implementação computacional do modelo, ainda que os resultados reportados já possuam importantes informações sobre o comportamento da economia pós-reforma. Os parâmetros do modelo foram calibrados de acordo com a estratégia de calibração descrita no apêndice C, utilizando como fonte de dados a Matriz de Contabilidade Social da economia brasileira para o ano de 2017.

São utilizados dados de arrecadação *efetiva* de tributos sobre a produção, desagregados ao nível de 67 setores econômicos e desmembrados entre arrecadação com PIS e Cofins e arrecadação com outros impostos sobre a produção. Assim, a ausência de informações sobre a distribuição de tributação dentro de cada setor e sobre o montante de créditos tributários molda nosso instrumento de análise. Em particular, o modelo descrito na seção 2 não incorpora explicitamente a existência de atividades produtivas informais e a calibração dos parâmetros do seu sistema tributário, discutida no apêndice C, adota a hipótese simplificadora de que não há crédito tributário no Brasil em 2017 (ou seja, que toda a arrecadação observada nos dados foi cobrada sobre o faturamento dos setores). Neste contexto, a calibração do modelo supõe alíquota única dentro de cada setor e alíquotas efetivas (líquidas de créditos tributários) como alíquotas sobre faturamento.

3.1 O equilíbrio competitivo pré-reforma

A estratégia de calibração de parâmetros discutida no apêndice C garante que o equilíbrio competitivo calculado para a economia sob a estrutura tributária vigente pré-reforma reproduz os dados disponibilizados na Matriz de Contabilidade Social ilustrada na tabela 3. A tabela 4 apresenta os valores utilizados para os parâmetros não calibráveis a partir dados disponibilizados na Matriz de Contabilidade Social.

β:	0.9388	σ_j:	-1.00	(elast. Z_j por F_j: 0.50)	γ:	0.90	(elast. C por L: 10.00)
δ:	3.481%	ζ_j:	-5.00	(elast. z_{ij} por z_{lj}: 0.17)	γ_c:	-1.00	(elast. c_i por c_j: 0.50)
r:	10.000%	ρ_j:	-1.00	(elast. K_j por H_j: 0.50)	γ_l:	-1.00	(elast. l_i por l_j: 0.50)
d:	10.000%	λ_k:	-1.00	(elast. k_i por k_j: 0.50)	γ_g:	-1.00	(elast. g_i por g_j: 0.50)
		λ_h:	-1.00	(elast. h_{ij} por h_{lj}: 0.50)			

Table 4: Parâmetros (exógenos) utilizados

A figura 1 apresenta a distribuição entre setores econômicos de alíquotas de impostos sobre a produção vigentes no equilíbrio competitivo pré-reforma. Trata-se de um gráfico de barras horizontais que apresenta em seu eixo vertical os todos os setores econômicos utilizados na desagregação da economia brasileira.

Figure 1: Distribuição de alíquotas (sobre faturamento) em 2017.

Horizontalmente são apresentadas três tipos de alíquotas para cada setor: (i) a alíquota de impostos sobre a produção de cada setor é apresentada pela distância entre a barra vertical vermelha e a bola vermelha; (ii) a alíquota de PIS/COFINS é apresentada como a largura da barra alaranjada (sólida); e (iii) a alíquota de outros impostos sobre a produção (líquidos de subsídios) é apresentada como a largura da barra azul (hachurada). Uma linha horizontal em cinza é disponibilizada para cada setor com o objetivo de facilitar a associação de cada setor com suas respectivas alíquotas (barras e bola).

É possível inferir a partir da figura 1 que existe uma grande variabilidade de alíquotas (implícitas/efetivas) de impostos sobre a produção, tanto daquelas referentes ao PIS/COFINS quanto das demais alíquotas. Há setores com alíquota total superior a 10%, como "Refino de Petróleo o coquerias..." e "Transporte aéreo...", e setores com alíquotas inferiores a 1%, como é o caso de "Atividades imobiliárias.." e de "Serviços domésticos...".

Outro ponto notável na figura 1 é o fato de que as alíquotas (implícitas/efetivas) de PIS/COFINS não só possuem grande variabilidade entre setores, mas também possuem magnitude bastante inferior àquela prevista na legislação correspondente[4]. Parte relevante da explicação para a menor magnitude das alíquotas certamente decorre de o modelo da seção 2 não incorporar explicitamente a existência de atividades produtivas informais ao mesmo tempo em que o faturamento de cada setor é calculado nos dados considerando tais atividades. Já a variabilidade de alíquotas entre setores certamente reflete a variabilidade de créditos tributários entre setores.

A tabela 5 apresenta uma seleção de agregados econômicos observados no equilíbrio competitivo pré-reforma, todas elas em milhões de Reais (R$). Na parcela superior da tabela são apresentados o nível de cada fator empregado na produção (trabalho, capital privado e capital público), sua respectiva remuneração e o Produto Interno Bruto (PIB). O consumo de lazer é também apresentado na parcela superior da tabela, posicionado logo acima do nível de trabalho.

[4] Em 2017, a arrecadação efetiva com PIS/Cofins representou aproximadamente 2,220% do faturamento total de todos os setores econômicos e aproximadamente 3,999% do valor adicionado total de todos os setores econômicos.

Lazer:	357,360.09				
Trabalho:	3,214,967.85	Salário:	1.00		
Capital privado:	2,281,833.15	Juros privado:	100.00%	PIB (preços ano base):	6,773,538.27
Capital público:	293,348.27	Juros público (implícito):	100.00%	PIB (sem imputação):	6,583,319.00
PIB (dispêndio):	6,773,538.27	PIB (renda):	6,773,538.27	PIB (produção):	6,773,538.27
Consumo privado:	3,841,084.05	Renda trabalho:	3,214,967.85	Produção bruta:	11,208,472.27
(imposto cons.):	404,015.20	Renda capital privado:	2,281,833.15	Impostos indiretos:	466,351.52
Consumo público:	1,517,977.27	Renda capital público:	293,348.27	Produção intermediária (dom.):	4,375,792.76
Invest. privado:	794,325.64	Arrecadação (produção):	517,037.48	Produção intermediária (ext.):	525,492.75
(imp. inv. pr.):	55,235.36	Arrecadação (indireta):	466,351.52		
Invest. público:	102,117.04				
(imp. inv. pub.):	7,100.96				
Var. estoques:	4,386.00				
Exportações:	824,434.00				
Importações:	777,137.25				

Table 5: Agregados econômicos no equilíbrio competitivo pré-reforma (em milhões de R$)

Conforme discutido no apêndice C, os parâmetros do modelo são escolhidos para que a unidade de medida de cada produto ou fator seja tal que o preço desse produto ou fator no equilíbrio competitivo pré-reforma seja igual a unidade. Com isso, os preços apresentados na segunda coluna da parcela superior da tabela 5 se igualam a 1 por construção. A parcela inferior da tabela apresenta a composição do PIB segundo as óticas do *dispêndio* (primeira coluna), da *renda* (segunda coluna) e do *produto* (terceira coluna). Conforme esperado, contabilmente, as três colunas totalizam o mesmo valor: R$ $6.773.538,27$ milhões. Este valor é superior ao valor apresentado para o PIB na parcela superior da tabela, aquele referido como PIB (sem imputação), pelo fato de conter em sua contabilização a imputação de valor na renda do capital público. Sendo 2017 o ano base utilizado para calcular o outro valor apresentado para o PIB na parcela superior da tabela, aquele referido como PIB (ano base), este último coincide com o PIB calculado em cada uma das três óticas.

3.2 A reforma fiscalmente neutra

Neste primeiro exercício, é simulado o efeito sobre o equilíbrio competitivo de uma reforma que substitui a tributação PIS/COFINS por um imposto sobre valor adicionado (IVA), cuja alíquota é uniforme entre setores e mantém inalterada a receita tributária que o governo obtém a partir da tributação sobre a produção de bens e serviços. Por este motivo, esta reforma é designada como *reforma fiscalmente neutra.* Neste exercício, as alíquotas dos demais impostos permanecem inalteradas.

A fim de tornar a descrição do exercício mais concreta, suponha que T_0 denota a arrecação tributária sobre a produção *antes* da reforma e T_∞ denota a arrecação tributária sobre a produção *após* a reforma.

Então,

$$T_0 = \sum_{s\in\mathcal{B}} B^R_{0s}\tau^R_{0s} + \sum_{s\in\mathcal{B}} B^{NR}_{0s}\tau^{NR}_{0s} \quad \text{e} \quad T_\infty = \sum_{s\in\mathcal{B}} B^R_{\infty s}\tau^R_{\infty s} + \sum_{s\in\mathcal{B}} B^{NR}_{\infty s}\tau^{NR}_{\infty s},$$

em que B^R_{ms} e τ^R_{ms} denotam, respectivamente, a base de incidência (tributária) e a alíquota dos impostos objetos da reforma (PIS e Cofins) no setor $s \in \mathcal{B}$ no momento $m \in \{0, \infty\}$, enquanto que B^{NR}_{ms} e τ^{NR}_{ms} denotam, respectivamente, a base de incidência (tributária) e a alíquota dos outros impostos sobre a produção (os quais não são objeto da reforma) no setor $s \in \mathcal{B}$ no momento $m \in \{0, \infty\}$. A *reforma fiscalmente neutra* é aquela em que a nova alíquota de impostos ($\tau^R_{\infty s}$) é escolhida de forma a preservar a receita tributária que o governo obtém a partir da tributação sobre a produção de bens e serviços (ou seja, $T_0 = T_\infty$). Como o exercício proposto também uniformiza a alíquota entre setores e preserva a alíquota dos demais impostos, então $\tau^R_{\infty s}$ é invariante ao setor $s \in \mathcal{B}$ e $\tau^{NR}_{\infty s} = \tau^{NR}_{0s}$. Se $\tau^R_{\infty s} = \tau^R_\infty$ para cada s, então

$$\tau^R_\infty = \frac{1}{\sum_{s\in\mathcal{B}} B^R_{\infty s}} \left(T_0 - \sum_{s\in\mathcal{B}} B^{NR}_{\infty s}\tau^{NR}_{0s} \right). \tag{63}$$

Os objetos *a priori* desconhecidos presentes no lado direito da equação (63) são as bases de incidência de impostos após a reforma: $B^R_{\infty s}$ para os impostos objeto da reforma e $B^{NR}_{\infty s}$ para os demais impostos. No caso do exercício proposto nesta seção, $B^R_{\infty s}$ denota o valor adicionado no setor s após a reforma e $B^{NR}_{\infty s}$ denota o faturamento do setor s após a reforma. Uma análise ingênua, mas que proporciona um referencial útil para a análise a seguir, é usar (63) para calcular τ^R_∞ ignorando que a reforma muito provavelmente modificará o valor adicionado e o faturamento em cada setor s. Ou seja, calcular τ^R_∞ supondo que $B^R_{\infty s}$ se iguala ao valor adicionado no setor s *antes* da reforma e que $B^{NR}_{\infty s}$ se iguala ao faturamento do setor s *antes* da reforma (ou seja, $B^{NR}_{\infty s} = B^{NR}_{0s}$). O resultado desse cálculo, a partir dos dados disponíveis para 2017, é razão entre a arrecadação efetiva com PIS/Cofins e o valor adicionado total de todos os setores econômicos, aproximadamente 3,999%.

A análise apresentada a seguir também utiliza (63), mas é menos ingênua no sentido de que ela reconhece $B^R_{\infty s}$ e $B^{NR}_{\infty s}$ como resultantes de escolhas de firmas e consumidores, as quais muito provavelmente mudarão após a modificação do sistema tributário. Tal reconhecimento é disciplinado pelo modelo de equilíbrio geral descrito na seção 2.

A figura 2 apresenta a distribuição entre setores econômicos de alíquotas de impostos sobre a produção vigentes no equilíbrio competitivo *após* a reforma fiscalmente neutra. O formato de apresentação da distribuição de alíquotas é idêntico àquele utilizado na figura 1.

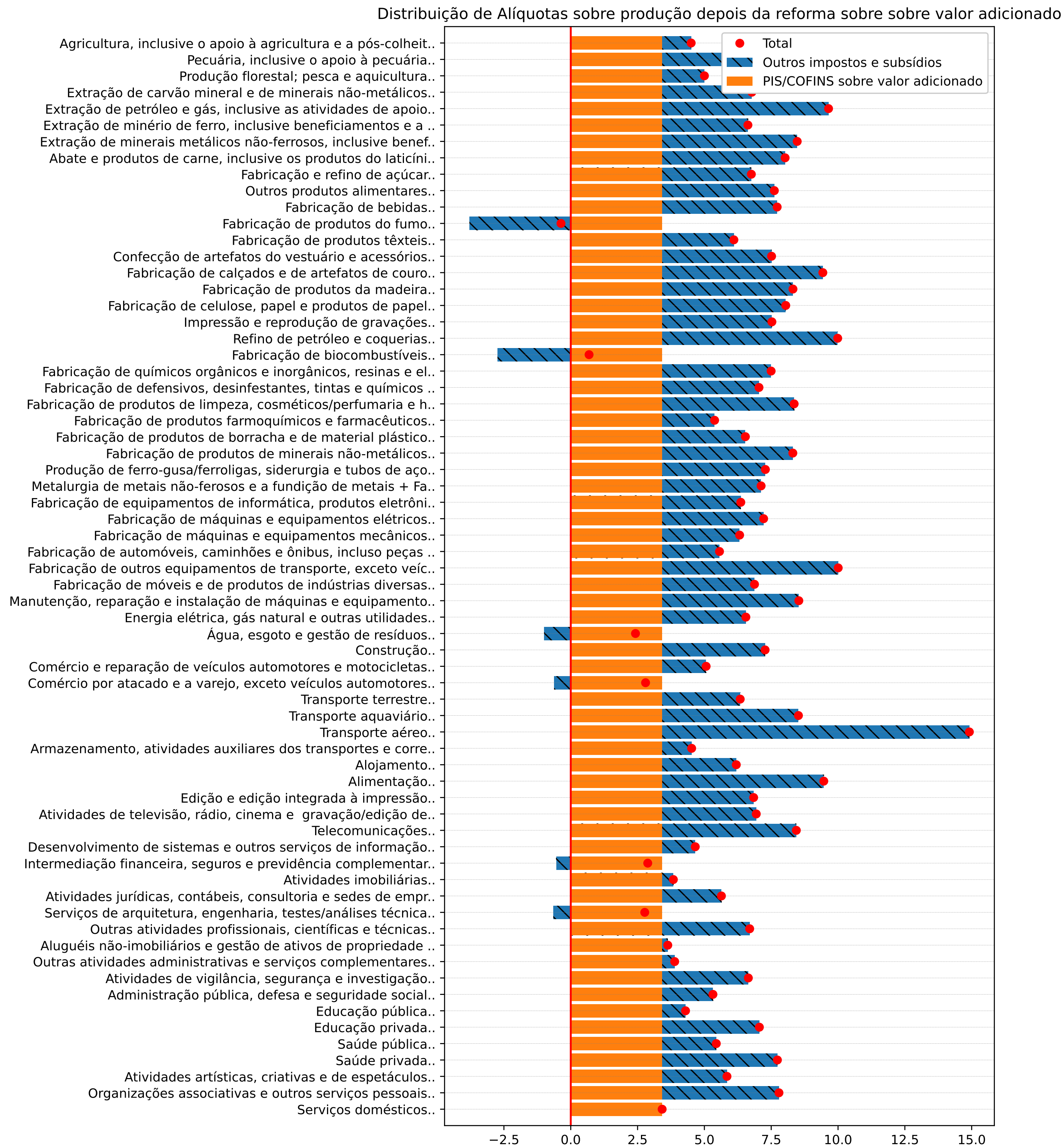

Figure 2: Distribuição de alíquotas após reforma com insttuição de IVA

Conforme esperado a partir do desenho do exercício de reforma fiscalmente neutra, as barras em cor laranja (sólidas) possuem todas a mesma largura e indicam que a alíquota de IVA que mantém inalterada a receita tributária sobre a produção se situa entre 3,5% a 4%. Mais precisamente, o valor é de 3,4%. Visto que no referencial obtido com a análise ingênua foi apontado alíquota de aproximadamente 3,999%, este resultado sugere que a base de incidência desse imposto (valor adicionado dos setores) aumentou após a reforma.

O efeito dessa reforma sobre as variáveis macroeconômicas pode ser inferido a partir da tabela 6, a qual apresenta para o equilíbrio após a reforma fiscalmente neutra as mesmas variáveis apresentadas na tabela 5. Conforme garantido pelo desenho do atual exercício, a arrecadação com tributação sobre a produção permanece inalterada em $517.037,48$ milhões. O nível e a composição da arrecadação com tributação indireta (R$ $466.351,52$ milhões) são também mantidos constantes neste exercício, por simplicidade. Ela é obtida a partir de impostos sobre o consumo privado (R$ $404.015,20$ milhões), de impostos sobre o investimento privado (R$ $55.235,36$ milhões) e de impostos sobre o investimento público (R$ $7.100,96$ milhões).

Lazer:	301,909.50				
Trabalho:	3,270,368.48	Salário:	1.00		
Capital privado:	2,378,794.36	Juros privado:	100.00%	PIB (preços ano base):	6,947,777.78
Capital público:	288,440.72	Juros público (implícito):	100.00%	PIB (sem imputação):	6,676,704.75
PIB (dispêndio):	6,866,924.02	PIB (renda):	6,866,924.02	PIB (produção):	6,866,924.02
Consumo privado:	3,933,849.21	Renda trabalho:	3,270,368.48	Produção bruta:	11,457,200.29
(imposto cons.):	404,015.20	Renda capital privado:	2,330,572.90	Impostos indiretos:	466,351.52
Consumo público:	1,510,966.42	Renda capital público:	282,593.63	Produção intermediária (dom.):	4,512,832.86
Invest. privado:	811,292.36	Arrecadação (produção):	517,037.48	Produção intermediária (ext.):	543,794.92
(imp. inv. pr.):	55,235.36	Arrecadação (indireta):	466,351.52		
Invest. público:	98,373.26				
(imp. inv. pub.):	7,100.96				
Var. estoques:	0.00				
Exportações:	846,518.50				
Importações:	800,427.24				

Table 6: Agregados econômicos no equilíbrio competitivo pós-reforma

A comparação da tabela 6 com a tabela 5 mostra que, sob a calibração apresentada na tabela 4, a reforma fiscalmente neutra resulta na elevação (nominal[5]) do nível de consumo privado agregado e do nível de PIB. O consumo privado (nominal) aumenta de R$ 3.841.084,05 milhões para R$ 3.933.849,21 milhões, uma elevação permanente de aproximadamente 2,42%. Já o PIB (nominal) aumenta de R$ 6.773.538,27 milhões para R$ 6.866.924,02 milhões, uma elevação permanente de aproximadamente 1,38%. Em *termos reais*, o PIB (ano base) aumenta de R$ 6.773.538,27 milhões para R$ 6.947.777,78 milhões, uma elevação permanente de aproximadamente 2,57%. Também se destaca na comparação da tabela 6 com a tabela 5 a relevante elevação do comércio internacional (exportações e importações),

[5] Estritamente, o conceito nominal aqui utilizado não corresponde ao conceito usualmente empregado em análises macroeconômicas uma vez que o preço do trabalho é mantido igual a unidade na presente análise, por construção. Para obter o conceito nominal usualmente observado nos dados, é necessário multiplicar todos os preços pela inflação de salários. Como há indeterminação do nível de preços no modelo aqui empregado, tal cálculo é não factível.

ainda que a balança comercial tenha sido mantida fixa neste exercício. Por conveniência, esta elevação e todas as demais variações percentuais obtidas a partir da comparação da tabela 6 com a tabela 5 são apresentadas na figura 3.

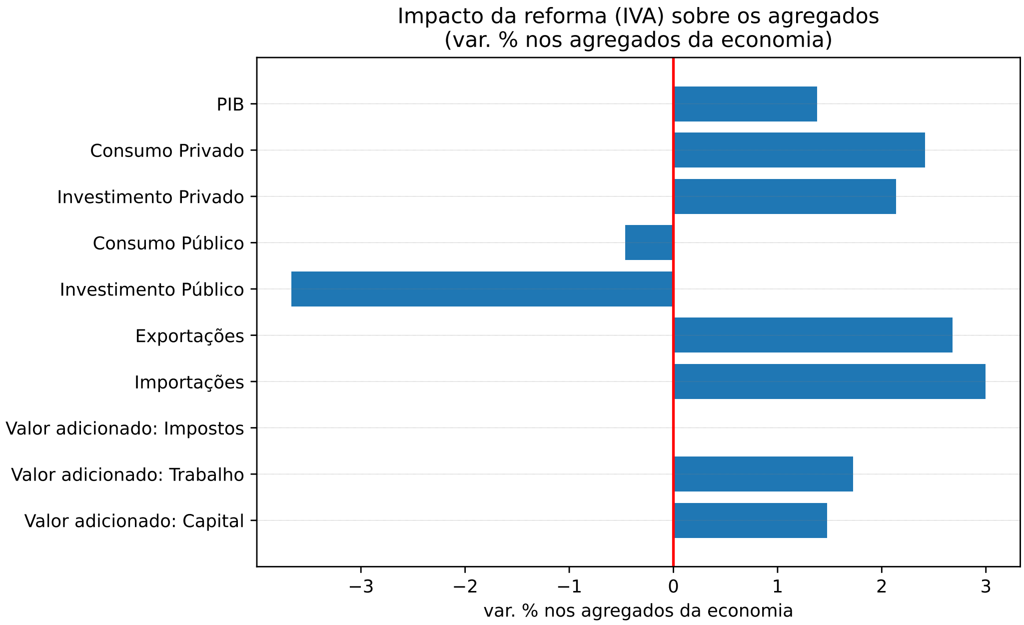

Figure 3: Impactos agregados da reforma fiscalmente neutra

Cabe destacar que a sugestão obtida a partir da comparação da alíquota fiscalmente neutra com aquela obtida na análise ingênua, de elevação dos valor adicionado dos setores, é confirmada na figura 3.

Uma leitura mais interessada dos resultados manifestará interesse em visualizar os efeitos intersetoriais da reforma fiscalmente neutra. As figuras 4, 5 e 6 possuem como objetivo atender a esta eventual demanda. A figura 4 apresenta o efeito percentual da reforma fiscalmente neutra sobre a arrecadação de cada um dos setores. Ela mostra que a reforma fiscalmente neutra aumenta a arrecadação tributária sobre a produção em alguns setores e reduz o mesmo tipo de arrecadação em outros[6], conforme esperado de uma reforma que mantém inalterada a arrecadação de tributos sobre a produção.

[6] O efeito sobre a arrecadação do setor "Serviços domésticos" não é visível na figura, pois este setor possui tributação total nula no equilíbrio inicial (ver figura 1) e, portanto, o aumento percentual de arrecadação é infinito neste setor.

Figure 4: Impactos setoriais da reforma fiscalmente neutra (tributação)

Figure 5: Impactos setoriais da reforma fiscalmente neutra (produção)

A figura 5, por sua vez, apresenta o efeito percentual da reforma fiscalmente neutra sobre a produção de cada um dos setores. Ela mostra que praticamente todos os setores elevam sua produção após a reforma, com destaque para os setores "Fabricação de outros equipamentos de transporte, exceto veículos automotores", "Impressão e reprodução de gravações" e "Extração de petróleo e gás, inclusive as atividades de apoio". As exceções a esta regra são o setor privado "Fabricação de produtos de limpeza, cosméticos/perfumaria e higiene pessoal" e os setores da administração pública: "Administração pública, defesa e seguridade social", "Educação pública" e "Saúde pública". A queda de produção nesses três últimos setores é consequência direta da redução do gasto público já identificada na figura 3, uma vez que o governo consome praticamente toda a produção desses setores.

A figura 6 encerra a exposição de impactos setoriais da instituição de um IVA fiscalmente neutro apresentando o efeito percentual da reforma fiscalmente neutra sobre o valor adicionado de cada um dos setores. Ela mostra que o valor adicionado se eleva (de forma permanente) na grande maioria dos setores. Há queda no valor adicionado em somente 17 dos 66 setores[7] apresentados na figura 6. As maiores elevações ocorrem no setores "Fabricação de outros equipamentos de transporte, exceto veículos automotores" (com quase 20%) e "Extração de petróleo e gás, inclusive as atividades de apoio" (com aproximadamente 15%).

[7]Cabe destacar que dois dos 67 setores disponíveis na base de dados foram analisados de forma conjunto: o setor "Metalurgia de metais não-ferrosos e a fundição de metais" e o setor "Fabricação de produtos de metal, exceto máquinas e equipamentos". Por esta razão, os resultados são apresentados para 66 setores.

Figure 6: Impactos setoriais da reforma fiscalmente neutra (valor adicionado)

As maiores reduções são contabilizadas nos setores "Fabricação de produtos do fumo" (com mais 30% de queda) e "Fabricação de biocombustíveis" (com pouco mais de 20% de queda).

3.3 Equalização de alíquotas e IVA

Um interessante ponto de vista sobre a reforma estudada na seção 3.2 pode ser obtido estudando uma reforma que se restrinja a equalizar as alíquotas entre os setores da economia, sem trocar a base de incidência do imposto do faturamento para o valor adicionado. De fato, este exercício é capaz revelar a composição do efeito da reforma fiscalmente neutra a evidenciar qual parcela dos seus efeitos já é obtida com a mera uniformização de alíquotas. A parcela restante pode então ser atribuída a troca de base tributária.

A equação (63) mais uma vez é útil para tornar a descrição do exercício mais concreta. A uniformização entre setores da alíquota do imposto objeto da reforma e a preservação a alíquota dos demais impostos, mais uma vez, geram $\tau^{NR}_{\infty s} = \tau^{NR}_{0s}$ e $\tau^{R}_{\infty s} = \tau^{R}_{\infty}$ para cada $s \in \mathcal{B}$, em que τ^{R}_{∞} é definida por (63). Diferentemente do exercício anterior, no entanto, neste exercício, tanto $B^{R}_{\infty s}$ quanto $B^{NR}_{\infty s}$ denotam o faturamento do setor s após a reforma.

Novamente, um referencial útil pode ser obtido usando (63) para calcular τ^{R}_{∞} ignorando que a reforma muito provavelmente modificará o faturamento em cada setor s. Ou seja, calcular τ^{R}_{∞} supondo $B^{R}_{\infty s} = B^{R}_{0s}$ e $B^{NR}_{\infty s} = B^{NR}_{0s}$. O resultado desse cálculo, a partir dos dados disponíveis para 2017, é razão entre a arrecadação efetiva com PIS/Cofins e o *faturamento* total de todos os setores econômicos, aproximadamente 2,220%.

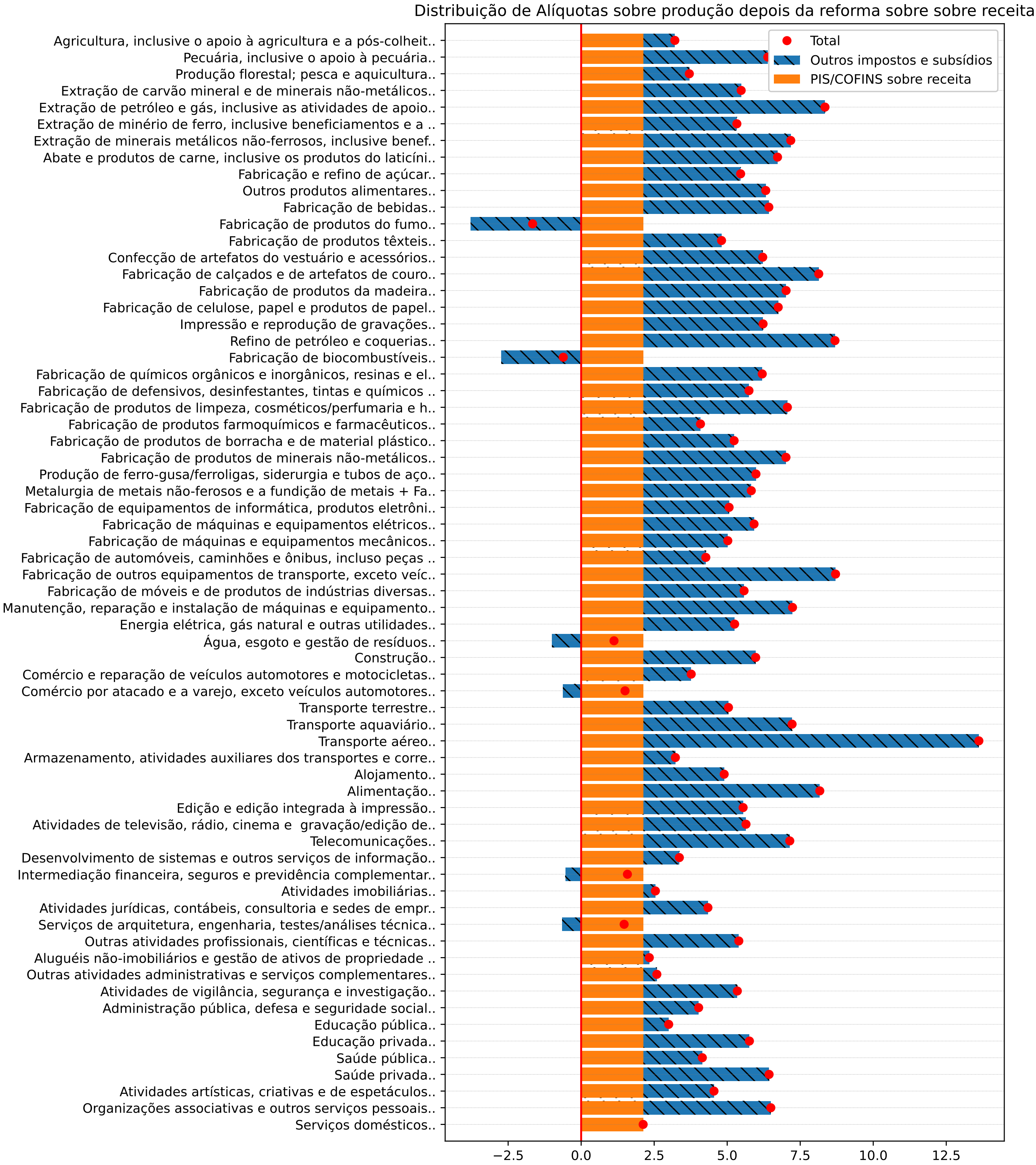

Figure 7: Distribuição de alíquotas após reforma com equalização de alíquotas

Analogamente as figuras 1 e 2, a figura 7 apresenta a distribuição entre setores econômicos de alíquotas de impostos sobre a produção. Conforme esperado do desenho do exercício, as barras em cor laranja (sólidas) possuem todas a mesma largura e indicam que a alíquota de Imposto sobre Faturamento que mantém inalterada a receita tributária sobre a produção se situa abaixo de 2.5%. Mais precisamente, o valor é 2,1%. Esta alíquota é sensivelmente menor do que aquela obtida na figura 2, aproximadamente

3,4%, e pouco menor do que aquela obtida ignorando a mudança de comportamento de consumidores e firmas, aproximadamente 2,22%. O primeiro fato mostra que a troca de base tributária, de faturamento para valor adicionado, requer elevação de aproximadamente 1,3 pontos percentuais na alíquota do imposto se existe o objetivo de manter inalterada a receita tributária sobre a produção. O segundo fato sugere que a mudança de comportamento de consumidores e firmas após a equalização de alíquotas eleva a base de incidência do imposto (o faturamento).

A figura 8 apresenta os efeitos agregados da reforma de equalização de alíquotas sobre faturamento. Tais efeitos são apresentados como barras horizontais em cor laranja (sólidas). Por conveniência, reproduz-se também na figura 8 os efeitos agregados da reforma fiscalmente neutra, anteriormente apresentados na figura 3. Tais efeitos são apresentados como barras horizontais azuis hachuradas e foram posicionados por baixo das barras alaranjadas (sólidas).

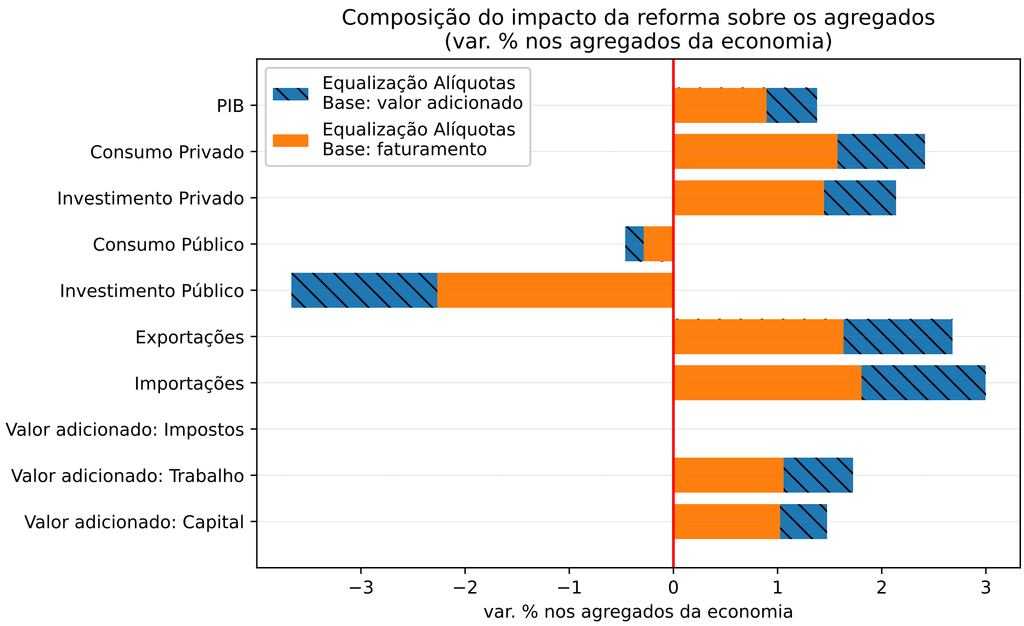

Figure 8: Composição dos impactos agregados da reforma fiscalmente neutra

A figura 8 revela que a maior parte do impacto agregado da reforma fiscalmente neutra decorre da eliminação de dispersão da alíquotas entre os setores econômicos. De fato, note que a barra sólida (em cor laranja) sobrepõe mais do que a metade da barra hachurada (em azul). Por outro lado, a figura também revela que a troca de base tributária possui efeito bastante relevante sobre os agregados econômicos, uma vez que cerca de 1/3 da barra hachurada (em azul) continua visível após a sobreposição das barras sólidas.

Figure 9: Impactos setoriais da reforma de equalização de alíquotas (valor adicionado)

Em analogia a figura 6, a figura 9 apresenta o efeito sobre o valor adicionado de cada setor decorrente da reforma de eliminação de dispersão de alíquotas entre setores. A grande similaridade entre as figuras 6 e 9 revela que praticamente toda a elevação de valor adicionado obtida com a reforma fiscalmente neutra, apresentada na figura 6, decorre da equalização de alíquotas entre setores econômicos.

Por fim, reporta-se na figura 10 o efeito sobre a tributação de cada setor implicado pela equalização de alíquotas. Em comparação com a figura 4, observa-se pelo diferencial de escala dos eixos horizontais dessas figuras que a troca de base tributária possui relevante efeito no nível de tributação de cada setor. O padrão de aumento e redução de tributação entre setores, por outro lado, é resultado quase completo da eliminação de dispersão de alíquotas entre setores econômicos.

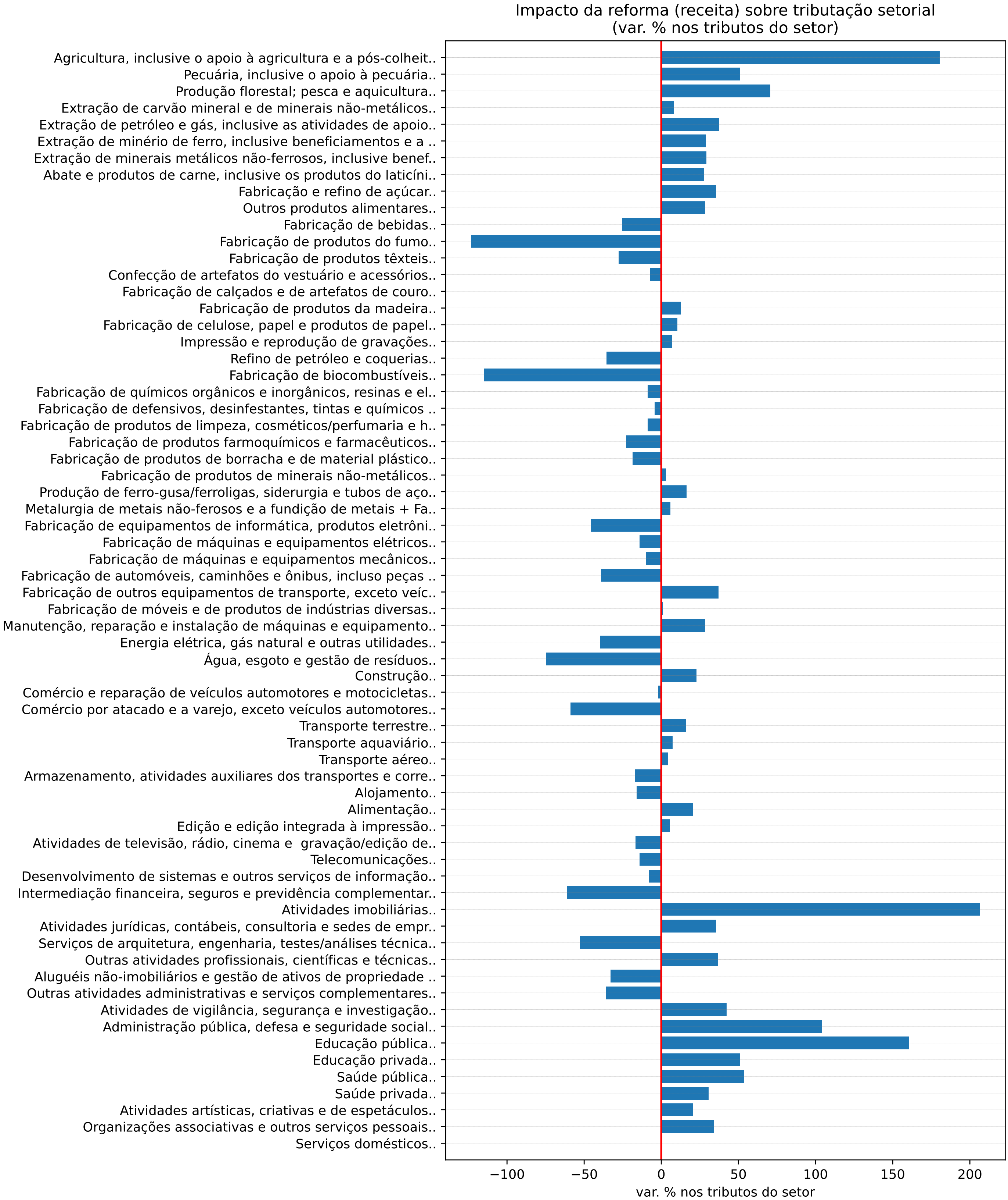

Figure 10: Impactos setoriais da reforma de equalização de alíquotas (tributação)

4 Considerações Finais

Ao estudar uma reforma que (i) uniformiza a alíquota agregada de impostos federais sobre a produção e (ii) adota como base de incidência tributária somente o valor adicionado no processo produtivo, a análise de equilíbrio geral aqui documentada mostrou que tal reforma possui grande potencial para ganhos de eficiência nas atividades produtivas da economia brasileira. Algumas considerações são cabíveis neste momento, no entanto.

Primeiramente, o tratamento implícito da informalidade no modelo aqui empregado geram alíquotas *implícitas* com magnitudes menores do que aquelas previstas em lei. Assim, o valor exato da alíquota fiscalmente neutra de 3,4% obtida na seção 3 não pode ser comparada diretamente com análises que incorporam explicitamente a presença de informalidade na economia brasileira. Uma solução simples e transparente para remediar esta limitação é dividir a alíquota fiscalmente neutra de 3,4% pela taxa de formalidade na economia brasileira, definida aqui como a proporção $\phi \in (0, 1)$ do valor adicionado que é gerada pelas atividades formais. Supondo que a reforma tributária aqui estudada não modifica de forma significativa esta proporção, a alíquota fiscalmente neutra prevista seria de $(3{,}4/\phi)\%$. Por exemplo, se as atividades formais geram 68% do valor adicionado da economia brasileira, então $\phi = 0{,}68$ e a alíquota fiscalmente neutra sobre valor adicionado do setor formal seria de $(3{,}4/\phi)\% = 5\%$.

Em seguida, cabe destacar que a hipótese simplificadora adotada no procedimento de calibração do sistema tributário do modelo gera superestimação dos efeitos da migração da base de incidência tributária do faturamento para valor adicionado. Especificamente, a arrecadação efetiva observada nos dados brasileiros de 2017 é interpretada neste procedimento como originada completamente da tributação sobre faturamento (e, portanto, sem a presença de créditos tributários). Como na realidade brasileira existe a concessão de créditos tributários em alguns setores (não observadas nos dados disponíveis para este trabalho), parte da tributação federal sobre a produção pode ser vista como já incidente sobre o valor adicionado desses setores. Neste sentido, parte dos efeitos (ganhos de eficiência) da reforma aqui estudada já se concretizaram quando tais créditos tributários foram estabelecidos e, portanto, os resultados aqui apresentados precisam ser interpretados como limites superiores para os ganhos de bem estar da reforma. Não obstante, os resultados da nossa análise mostram que os ganhos potenciais são significativos, podendo chegar a 2.4% em termos de consumo privado no longo prazo.

Por fim, além de contribuir para a análise empírica dos efeitos sobre a economia brasileira da substituição do tributos federais PIS e Cofins pela CBS, é importante destacar a contribuição prática deste trabalho para o desenvolvimento de futuras análises de regimes tributários alternativos. A detalhada apresentação do instrumental empregado na análise (do *modelo* nas seções 2 e A, da estratégia computacional para *cálculo de equilíbrio* na seção B e da estratégia de *calibração* nas seção C) estabelece um guia prático para o desenvolvimento de novos estudos macroeconômicos com interesse nos impactos de reformas tributárias e que incorporam as escolhas de firmas e consumidores na definição endógena da base dos de inidência dos impostos. Adicionalmente, a implementação computacional em linguagem de programação aberta/livre (linguagem de programação `Python`) e sua disponibilização para outros presquisadores interessados no assunto buscam democratizar o acesso da comunidade científica brasileira ao ferramental de equilíbrio geral computável.

References

M. Cardenete, A. Guerra, and F. Sancho. *Applied General Equilibrium: An Introduction.* Springer Texts in Business and Economics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, second edition, 2017.

T. V. Cavalcanti. Tributos sobre a folha ou sobre o faturamento? efeitos quantitativos para o brasil. *Revista Brasileira de Economia*, 62(3):249–261, 2008.

W. B. Da Silva, N. L. Paes, and R. Ospina. The replacement of payroll tax by a tax on revenues: A study of sectorial impacts on the brazilian economy. *Economia*, 16(1):46–59, 2015.

P. B. Dixon and D. Jorgenson. *Handbook of computable general equilibrium modeling*, volume 1. Newnes, 2013.

M. Gesualdo, J. A. Giesecke, N. H. Tran, and F. Felici. Building a computable general equilibrium tax model for Italy. *Applied Economics*, 51(56):6009–6020, 2019.

P. J. Kehoe and T. J. Kehoe. A primer on static applied general equilibrium models. *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 18(1):2–16, 1994.

T. J. Kehoe and E. C. Prescott. Introduction to the symposium: the discipline of applied general equilibrium. *Economic Theory*, 6(1):1–11, 1995.

T. J. Kehoe, P. J. Noyola, A. Manresa, C. Polo, and F. Sancho. A general equilibrium analysis of the 1986 tax reform in Spain. *European Economic Review*, 32(2-3):334–342, 1988.

T. J. Kehoe, K. J. Ruhl, and J. B. Steinberg. Global imbalances and structural change in the United States. *Journal of Political Economy*, 126(2):761–796, 2018.

T. J. Kehoe et al. Social Accounting Matrices and applied general equilibrium models. Technical report, Federal Reserve Bank of Minneapolis, 1996.

V. Lledo. Tax systems under fiscal adjustment. *Tax Systems Under Fiscal Adjustment*, 2005(142):1–33, 2005.

N. L. Paes. Reforma tributária: os efeitos macroeconômicos e setoriais da pec 233/2008. *Estudos Econômicos (São Paulo)*, 41:487–512, 2011.

N. L. Paes and N. S. Bugarin. Parâmetros tributários da economia brasileira. *Estudos Econômicos (São Paulo)*, 36(4):699–720, 2006.

R. A. Pereira and P. C. Ferreira. Avaliação dos impactos macro-econômicos e de bem-estar da reforma tributária no brasil. *Revista Brasileira de Economia*, 64(2):191–208, 2010.

H. E. Scarf and T. Hansen. *The computation of economic equilibria.* Number 24. Yale University Press, 1973.

J. B. Shoven and J. Whalley. Applied general-equilibrium models of taxation and international trade: An introduction and survey. *Journal of Economic literature*, 22(3):1007–1051, 1984.

O. A. F. Tourinho, Y. L. B. Alves, and N. L. C. d. Silva. Implicações econômicas da reforma tributária: análise com um modelo cge. *Revista Brasileira de Economia*, 64:307–340, 2010.

P. G. Vasconcelos. O impacto da reforma do pis/cofins sobre a indústria brasileira. Master's thesis, Universidade Federal de Pernambuco, 2017.

I. S. Wing. Computable general equilibrium models and their use in economy-wide policy analysis. *Technical Note, Joint Program on the Science and Policy of Global Change, MIT*, 2004.

A Demonstrações

Lemma 1. *As escolhas ótimas de insumos e fatores satisfazem*

$$z_{ij} = \left(\frac{\alpha_{ij} \tilde{P}_j / P_i}{(A_j^Z a_{ij}^z)^{\zeta_j}} \right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}} Z_j(z_{\cdot j}), \quad com \quad \tilde{P}_j \equiv \left(\sum_{n \in \mathcal{B}} \left(\frac{\alpha_{nj}}{(a_{nj}^z P_n)^{\zeta_j}} \right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}} \right)^{\frac{\zeta_j - 1}{\zeta_j}} A_j^Z \tag{17}$$

$$k_{ij} = \left(\frac{\kappa_{ij} \tilde{R}_j / R_{ij}}{(A_j^K a_{ij}^k)^{\lambda_{kj}}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}} K_j(k_{\cdot j}) \quad com \quad \tilde{R}_j \equiv \left(\sum_{n \in \mathcal{B}} \left(\frac{\kappa_{nj}}{(a_{nj}^k R_{nj})^{\lambda_{kj}}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}} \right)^{\frac{\lambda_{kj} - 1}{\lambda_{kj}}} A_j^K \tag{18}$$

$$h_{ij} = \left(\frac{\omega_{ij} \tilde{W}_j / W_{ij}}{(A_j^H a_{ij}^h)^{\lambda_{hj}}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}} H_j(h_{\cdot j}) \quad com \quad \tilde{W}_j \equiv \left(\sum_{n \in \mathcal{S}} \left(\frac{\omega_{nj}}{(a_{nj}^h W_{nj})^{\lambda_{hj}}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}} \right)^{\frac{\lambda_{hj} - 1}{\lambda_{hj}}} A_j^H \tag{19}$$

Como consequência, o custo de aquisição de insumos e fatores pode ser reescrito como $\langle P_{\cdot j}, z_{\cdot j} \rangle = \tilde{P}_j Z_j$, $\langle R_{\cdot j}, k_{\cdot j} \rangle = \tilde{R}_j K_j$ *e* $\langle W_{\cdot j}, h_{\cdot j} \rangle = \tilde{W}_j H_j$.

Proof. As condições de primeira ordem necessárias para otimalidade são

$$\frac{\partial O_j}{\partial F_j} \frac{\partial F_j}{\partial K_j} \frac{\partial K_j}{\partial k_{ij}} - \frac{R_{ij}}{P_j} \leq 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial O_j}{\partial F_j} \frac{\partial F_j}{\partial K_j} \frac{\partial K_j}{\partial k_{ij}} - \frac{R_{ij}}{P_j} \right) k_{ij} = 0 \tag{64}$$

$$\frac{\partial O_j}{\partial F_j} \frac{\partial F_j}{\partial H_j} \frac{\partial H_j}{\partial h_{ij}} - \frac{W_{ij}}{P_j} \leq 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial O_j}{\partial F_j} \frac{\partial F_j}{\partial H_j} \frac{\partial H_j}{\partial h_{ij}} - \frac{W_{ij}}{P_j} \right) h_{ij} = 0 \tag{65}$$

$$\frac{\partial O_j}{\partial Z_j} \frac{\partial Z_j}{\partial z_{ij}} - \frac{P_i}{P_j} \leq 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial O_j}{\partial Z_j} \frac{\partial Z_j}{\partial z_{ij}} - \frac{P_i}{P_j} \right) z_{ij} = 0 \tag{66}$$

em que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z_j}{\partial z_{ij}} &= Z_j(\cdot) \frac{\partial \ln Z_j}{\partial z_{ij}} = Z_j(\cdot) \alpha_{ij} (z_{ij})^{\zeta_j - 1} / [a_{ij}^z A_j^Z Z_j(\cdot)]^{\zeta_j} = \alpha_{ij} \left(a_{ij}^z A_j^Z \right)^{-\zeta_j} [Z_j(\cdot)/z_{ij}]^{1-\zeta_j} \\
\frac{\partial K_j}{\partial k_{ij}} &= K_j(\cdot) \frac{\partial \ln K_j}{\partial k_{ij}} = K_j(\cdot) \kappa_{ij} (k_{ij})^{\lambda_{kj} - 1} / [a_{ij}^k A_j^K K_j(\cdot)]^{\lambda_{kj}} = \kappa_{ij} \left(a_{ij}^k A_j^K \right)^{-\lambda_{kj}} [K_j(\cdot)/k_{ij}]^{1-\lambda_{kj}} \\
\frac{\partial H_j}{\partial h_{ij}} &= H_j(\cdot) \frac{\partial \ln H_j}{\partial h_{ij}} = H_j(\cdot) \omega_{ij} (h_{ij})^{\lambda_{hj} - 1} / [a_{ij}^h A_j^H H_j(\cdot)]^{\lambda_{hj}} = \omega_{ij} \left(a_{ij}^h A_j^H \right)^{-\lambda_{hj}} [H_j(\cdot)/h_{ij}]^{1-\lambda_{hj}}
\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial F_j}{\partial K_j} = F_j(\cdot) \frac{\partial \ln F_j}{\partial K_j} = F_j(\cdot) \theta_j (K_j)^{\rho_j - 1} / [A_j^F F_j(\cdot)]^{\rho_j} = \theta_j \left(A_j^F \right)^{-\rho_j} [F_j(\cdot)/K_j]^{1-\rho_j} \tag{67}$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial H_j} = F_j(\cdot) \frac{\partial \ln F_j}{\partial H_j} = F_j(\cdot) \frac{(1-\theta_j)(H_j)^{\rho_j - 1}}{[A_j^F F_j(\cdot)]^{\rho_j}} = (1-\theta_j) \left(A_j^F \right)^{-\rho_j} [F_j(\cdot)/H_j]^{1-\rho_j} \tag{68}$$

Observe que $\frac{\partial Z_j}{\partial z_{ij}} \to \infty$ quando $z_{ij} \to 0$ se $\alpha_{ij} > 0$ e $\frac{\partial Z_j}{\partial z_{ij}} = 0$ para todo z_{ij} se $\alpha_{ij} = 0$. Assim, a condição (66) é satisfeita somente se $z_{ij} > 0$ para cada i tal que $\alpha_{ij} > 0$ e $z_{ij} = 0$ para cada i tal que $\alpha_{ij} = 0$. Sejam i e i' arbitrários tais que $\alpha_{ij} > 0$ e $\alpha_{i'j} > 0$, de forma que $z_{ij} > 0$ e $z_{i'j} > 0$. Usando

(66), tem-se $z_{ij} = \left(\frac{P_i}{P_{i'}}\frac{\alpha_{i'j}}{\alpha_{ij}}\left(a_{ij}^z/a_{i'j}^z\right)^{\zeta_j}\right)^{\frac{1}{\zeta_j-1}} z_{i'j}$ pois

$$\frac{P_i}{P_{i'}} = \frac{P_i/P_j}{P_{i'}/P_j} = \frac{\frac{\partial O_j}{\partial Z_j}\frac{\partial Z_j}{\partial z_{ij}}}{\frac{\partial O_j}{\partial Z_j}\frac{\partial Z_j}{\partial z_{i'j}}} = \frac{\alpha_{ij}(a_{ij}^z A_j^Z)^{-\zeta_j}[Z_j(\cdot)/z_{ij}(\cdot)]^{1-\zeta_j}}{\alpha_{i'j}(a_{i'j}^z A_j^Z)^{-\zeta_j}[Z_j(\cdot)/z_{i'j}(\cdot)]^{1-\zeta_j}} = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{i'j}}\left(\frac{a_{i'j}^z}{a_{ij}^z}\right)^{\zeta_j}\left(\frac{z_{i'j}}{z_{ij}}\right)^{1-\zeta_j}.$$

Este resultado em (2) produz $z_{i'j}\left(\sum_{i\in\mathcal{B}}\alpha_{ij}\left(\frac{P_{i'}}{P_i}\frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{i'j}}\left(a_{i'j}^z\right)^{\zeta_j}/a_{ij}^z\right)^{\frac{\zeta_j}{1-\zeta_j}}\right)^{\frac{1}{\zeta_j}} = A_j^Z Z_j$. Ou seja, $z_{i'j} = A_j^Z Z_j/\left(\frac{P_{i'}}{\alpha_{i'j}}\left(a_{i'j}^z\right)^{\zeta_j}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}}\left(\sum_{i\in\mathcal{B}}\alpha_{ij}\left(\alpha_{ij}/a_{ij}^z P_i\right)^{\frac{\zeta_j}{1-\zeta_j}}\right)^{\frac{1}{\zeta_j}}$. Substituindo de volta na relação entre z_{ij} e $z_{i'j}$ tem-se que para cada i tal que $\alpha_{ij}>0$ a escolha ótima satisfaz $z_{ij} = A_j^Z Z_j\left(\alpha_{ij}/\left(a_{ij}^z\right)^{\zeta_j}P_i\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}} / \left(\sum_{n\in\mathcal{B}}\left(\alpha_{nj}/(a\right.\right.$
Usando a definição de $\tilde{P}_j$, tem-se $z_{ij} = A_j^Z Z_j\left(\alpha_{ij}/\left(a_{ij}^z\right)^{\zeta_j}P_i\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}}/(\tilde{P}_j/A_j^Z)^{\frac{1}{\zeta_j-1}} = Z_j\left(\alpha_{ij}/\left(a_{ij}^z\right)^{\zeta_j}P_i\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}}(\tilde{P}_j/(A$
de onde segue a primeira igualdade em (17). Com isso, o custo de aquisição dos insumos $z_{\cdot j}$ é dado por

$$\langle P, z_{\cdot j}\rangle = Z_j\left(\frac{\tilde{P}_j}{(A_j^Z)^{\zeta_j}}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}}\sum_{i\in\mathcal{B}}P_i\left(\frac{\alpha_{ij}}{(a_{ij}^z)^{\zeta_j}P_i}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}} = A_j^Z Z_j\left(\frac{\tilde{P}_j}{(A_j^Z)^{\zeta_j}}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}}\left(\frac{\tilde{P}_j}{A_j^Z}\right)^{\frac{\zeta_j}{\zeta_j-1}} = \tilde{P}_j Z_j.$$

O procedimento algébrico para estabelecer as igualdades em (18) e (19) é análogo. Ele é apresentado a seguir por completude.

Note que $\frac{\partial F_j}{\partial K_j}\to\infty$ quando $K_j\to 0$ se $\theta_j>0$ e $\frac{\partial F_j}{\partial K_j}=0$ para todo K_j se $\theta_j=0$. Com isso, a condição (64) é satisfeita somente se $k_{ij}=0$ quando $\theta_j\kappa_{ij}=0$ e $k_{ij}>0$ quando $\theta_j\kappa_{ij}>0$. Sejam i e i' tais que $\theta_j\kappa_{ij}>0$ e $\theta_j\kappa_{i'j}>0$, de forma que $k_{ij}>0$ e $k_{i'j}>0$. Pela a condição (64), tem-se $k_{ij} = \left(\frac{R_{i'j}}{R_{ij}}\frac{\kappa_{ij}}{\kappa_{i'j}}\left(\frac{a_{i'j}^k}{a_{ij}^k}\right)^{\lambda_{kj}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}} k_{i'j}$ pois

$$\frac{R_{ij}}{R_{i'j}} = \frac{R_{ij}/P_j}{R_{i'j}/P_j} = \frac{\frac{\partial O_j}{\partial F_j}\frac{\partial F_j}{\partial K_j}\frac{\partial K_j}{\partial k_{ij}}}{\frac{\partial O_j}{\partial F_j}\frac{\partial F_j}{\partial K_j}\frac{\partial K_j}{\partial k_{i'j}}} = \frac{\kappa_{ij}\left(a_{ij}^k A_j^K\right)^{-\lambda_{kj}}[K_j(\cdot)/k_{ij}]^{1-\lambda_{kj}}}{\kappa_{i'j}\left(a_{i'j}^k A_j^K\right)^{-\lambda_{kj}}[K_j(\cdot)/k_{i'j}]^{1-\lambda_{kj}}} = \frac{\kappa_{ij}}{\kappa_{i'j}}\left(\frac{a_{i'j}^k}{a_{ij}^k}\right)^{\lambda_{kj}}\left(\frac{k_{i'j}}{k_{ij}}\right)^{1-\lambda_{kj}}.$$

Este resultado em (4) produz $k_{i'j}\left(\sum_{i\in\mathcal{B}}\kappa_{ij}\left(\frac{R_{i'j}}{R_{ij}}\frac{\kappa_{ij}}{\kappa_{i'j}}\left(a_{i'j}^k\right)^{\lambda_{kj}}/a_{ij}^k\right)^{\frac{\lambda_{kj}}{1-\lambda_{kj}}}\right)^{\frac{1}{\lambda_{kj}}} = A_j^K K_j$. Ou seja, $k_{i'j} = A_j^K K_j/\left(\frac{R_{i'j}}{\kappa_{i'j}}\left(a_{i'j}^k\right)^{\lambda_{kj}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}}\left(\sum_{i\in\mathcal{B}}\left(\kappa_{ij}/\left(R_{ij}a_{ij}^k\right)^{\lambda_{kj}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}}\right)^{\frac{1}{\lambda_{kj}}}$. Substituindo de volta na relação entre k_{ij} e $k_{i'j}$ tem-se que para cada i tal que $\theta_j\kappa_{ij}>0$ a escolha ótima satisfaz $k_{ij} = A_j^K K_j\left(\kappa_{ij}/\left(a_{ij}^k\right)^{\lambda_{kj}}R_{ij}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}}/$
Usando a definição de $\tilde{R}_j$, obtém-se a primeira igualdade em (18) e que o custo de contratação do capital $k_{\cdot j}$ pode ser escrito como $\langle R_{\cdot j}, k_{\cdot j}\rangle = \tilde{R}_j K_j$

Por fim, note que $\frac{\partial F_j}{\partial H_j}\to\infty$ quando $H_j\to 0$ se $\theta_j<1$ e $\frac{\partial F_j}{\partial H_j}=0$ para todo H_j se $\theta_j=1$. Com isso, a condição (65) é satisfeita somente se $h_{ij}=0$ quando $(1-\theta_j)\omega_{ij}=0$ e $h_{ij}>0$ quando $(1-\theta_j)\omega_{ij}>0$. Sejam i e i' tais que $(1-\theta_j)\omega_{ij}>0$ e $(1-\theta_j)\omega_{i'j}>0$, de forma que $h_{ij}>0$ e $h_{i'j}>0$. Pela a condição

(65), tem-se $h_{ij} = \left(\frac{W_{i'j}}{W_{ij}} \frac{\omega_{ij}}{\omega_{i'j}} \left(\frac{a^h_{i'j}}{a^h_{ij}} \right)^{\lambda_{hj}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}} h_{i'j}$ pois

$$\frac{W_{ij}}{W_{i'j}} = \frac{W_{ij}/P_j}{W_{i'j}/P_j} = \frac{\frac{\partial O_j}{\partial F_j} \frac{\partial F_j}{\partial H_j} \frac{\partial H_j}{\partial h_{ij}}}{\frac{\partial O_j}{\partial F_j} \frac{\partial F_j}{\partial H_j} \frac{\partial H_j}{\partial h_{i'j}}} = \frac{\omega_{ij} \big(a^h_{ij} A^H_j\big)^{-\lambda_{hj}} [H_j(\cdot)/h_{ij}]^{1-\lambda_{hj}}}{\omega_{i'j} \big(a^h_{i'j} A^H_j\big)^{-\lambda_{hj}} [H_j(\cdot)/h_{i'j}]^{1-\lambda_{hj}}} = \frac{\omega_{ij}}{\omega_{i'j}} \left(\frac{a^h_{i'j}}{a^h_{ij}} \right)^{\lambda_{hj}} \left(\frac{h_{i'j}}{h_{ij}} \right)^{1-\lambda_{hj}}.$$

Este resultado em (5) produz $h_{i'j} \left(\sum_{i \in \mathcal{B}} \omega_{ij} \left(\frac{W_{i'j}}{W_{ij}} \frac{\omega_{ij}}{\omega_{i'j}} \left(a^h_{i'j}\right)^{\lambda_{hj}} / a^h_{ij} \right)^{\frac{\lambda_{hj}}{1-\lambda_{hj}}} \right)^{\frac{1}{\lambda_{hj}}} = A^H_j H_j$. Ou seja, $h_{i'j} = A^H_j H_j / \left(\frac{W_{i'j}}{\omega_{i'j}} \left(a^h_{i'j}\right)^{\lambda_{hj}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}} \left(\sum_{i \in \mathcal{B}} \left(\omega_{ij} / (W_{ij} a^h_{ij})^{\lambda_{hj}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}} \right)^{\frac{1}{\lambda_{hj}}}$. Substituindo de volta na relação entre h_{ij} e $h_{i'j}$ tem-se que para cada i tal que $(1-\theta_j)\omega_{ij} > 0$ a escolha ótima satisfaz $h_{ij} = H_j \left(\frac{\omega_{ij}}{W_{ij}} \left(a^h_{ij}\right)^{\lambda_{hj}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}} / \Big(\sum$
Usando a definição de $\tilde{W}_j$, obtém-se a terceira igualdade em (19) e que o custo de contratação do trabalho $h_{\cdot j}$ pode ser escrito como $\langle W_{\cdot j}, h_{\cdot j} \rangle = \tilde{W}_j H_j$. □

Lemma 2. *O vetor $(Z_j, K_j, H_j, y_j) \in \mathbb{R}^{3+b}_{+}$ é solução do problema (20) somente se*

$$K_j = \left(\frac{\theta_j \tilde{Q}_j}{(A^F_j)^{\rho_j} \tilde{R}_j} \right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} F_j, \qquad H_j = \left(\frac{(1-\theta_j) \tilde{Q}_j}{(A^F_j)^{\rho_j} \tilde{W}_j} \right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} F_j \tag{21}$$

$$Z_j = \left(\frac{\eta_j \tilde{C}_j}{(A_j)^{\sigma_j} \tilde{P}_j} \right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} y_j, \qquad F_j = \left(\frac{(1-\eta_j) \tilde{C}_j}{(A_j)^{\sigma_j} \tilde{Q}_j} \right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} y_j, \tag{22}$$

em que

$$\tilde{Q}_j \equiv \left(\left(\frac{\theta_j}{\tilde{R}^{\rho_j}_j} \right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} + \left(\frac{1-\theta_j}{\tilde{W}^{\rho_j}_j} \right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} \right)^{\frac{\rho_j - 1}{\rho_j}} A^F_j \tag{23}$$

e

$$\tilde{C}_j \equiv \left(\left[\frac{\eta_j}{\tilde{P}^{\sigma_j}_j} \right]^{\frac{1}{1-\sigma_j}} + \left[\frac{1-\eta_j}{\tilde{Q}^{\sigma_j}_j} \right]^{\frac{1}{1-\sigma_j}} \right)^{\frac{\sigma_j - 1}{\sigma_j}} A_j. \tag{24}$$

Assim, problema de maximização de lucro π_j da firma j possui solução com nível de produção positivo e finito somente se o vetor de preços da economia (P, R, W) satisfaz

$$P_j = \tilde{C}_j \left[\tilde{P}_j(P), \tilde{Q}_j \left(\tilde{R}_j(R), \tilde{W}_j(W) \right) \right], \tag{25}$$

Qualquer nível de produção $y_j \geq 0$ é escolha ótima para a firma j sob (25), uma vez que todas elas implicam $\pi_j = 0$.

Proof. A escolha ótima de $(K_j, H_j) \in \mathbb{R}^2_{++}$ necessariamente satisfaz

$$\frac{\tilde{R}_j}{P_j} = \frac{\partial O_j}{\partial F_j} \frac{\partial F_j}{\partial K_j} = \frac{\partial O_j}{\partial F_j} \theta_j \left(A^F_j\right)^{-\rho_j} [F_j(\cdot)/K_j]^{1-\rho_j} \tag{69}$$

$$\frac{\tilde{W}_j}{P_j} = \frac{\partial O_j}{\partial F_j} \frac{\partial F_j}{\partial H_j} = \frac{\partial O_j}{\partial F_j} (1-\theta_j) \left(A^F_j\right)^{-\rho_j} [F_j(\cdot)/H_j]^{1-\rho_j} \tag{70}$$

em que

$$\frac{\partial O_j}{\partial Z_j} = O_j(\cdot)\frac{\partial \ln O_j}{\partial Z_j} = O_j(\cdot)\eta_j Z_j^{\sigma_j-1}/[A_jO_j(\cdot)]^{\sigma_j} = \eta_j\,[A_j]^{-\sigma_j}\,[y_j/Z_j(\cdot)]^{1-\sigma_j} \tag{71}$$

$$\frac{\partial O_j}{\partial F_j} = O_j(\cdot)\frac{\partial \ln O_j}{\partial F_j} = O_j(\cdot)\frac{(1-\eta_j)F_j^{\sigma_j-1}}{[A_jO_j(\cdot)]^{\sigma_j}} = (1-\eta_j)\,[A_j]^{-\sigma_j}\,[y_j/F_j]^{1-\sigma_j} \tag{72}$$

Usando (69) e (70), tem-se $\frac{\tilde{R}_j}{\tilde{W}_j} = \frac{\tilde{R}_j}{P_j}/\frac{\tilde{W}_j}{P_j} = \frac{\partial O_j}{\partial F_j}\frac{\partial F_j}{\partial K_j}/\frac{\partial O_j}{\partial F_j}\frac{\partial F_j}{\partial H_j} = \frac{\theta_j}{1-\theta_j}\left(\frac{H_j}{K_j}\right)^{1-\rho_j}$. Logo, $K_j = \left[\frac{\tilde{W}_j}{\tilde{R}_j}\frac{\theta_j}{1-\theta_j}\right]^{\frac{1}{1-\rho_j}} H_j$. Usando tal resultado em (3), produz-se

$$A_j^F F_j = H_j\left(\frac{\tilde{W}_j}{1-\theta_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}\left(\theta_j\left(\theta_j/\tilde{R}_j\right)^{\frac{\rho_j}{1-\rho_j}} + (1-\theta_j)\left((1-\theta_j)/\tilde{W}\right)^{\frac{\rho_j}{1-\rho_j}}\right)^{\frac{1}{\rho_j}}.$$

Ou seja, $H_j = A_j^F F_j\left(\frac{1-\theta_j}{\tilde{W}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}/(\tilde{Q}_j/A_j^F)^{\frac{1}{\rho_j-1}} = F_j\left(\frac{1-\theta_j}{\tilde{W}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}(\tilde{Q}_j/(A_j^F)^{\rho_j})^{\frac{1}{1-\rho_j}}$, em que já se usou a definição de $\tilde{Q}_j$. A segunda igualdade em (21) segue diretamente deste último resultado. Substituindo o resultado de volta na relação entre H_j e K_j, obtém-se a primeira igualdade de (21). Finalmente, o custo de fatores pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_jK_j + \tilde{W}_jH_j &= \tilde{R}_jF_j\left(\frac{\theta_j}{\tilde{R}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}(\tilde{Q}_j/(A_j^F)^{\rho_j})^{\frac{1}{1-\rho_j}} + \tilde{W}_jF_j\left(\frac{1-\theta_j}{\tilde{W}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}(\tilde{Q}_j/(A_j^F)^{\rho_j})^{\frac{1}{1-\rho_j}} \\
&= F_j\left[\left(\frac{\theta_j}{\tilde{R}_j^{\rho_j}}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} + \left(\frac{1-\theta_j}{\tilde{W}_j^{\rho_j}}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}\right]\left(\frac{\tilde{Q}_j}{(A_j^F)^{\rho_j}}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} \\
&= F_j\left[\frac{\tilde{Q}_j}{A_j^F}\right]^{\frac{\rho_j}{\rho_j-1}}\left(\frac{\tilde{Q}_j}{(A_j^F)^{\rho_j}}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} = \tilde{Q}_jF_j
\end{aligned}$$

Com isso, o objetivo da frma j pode ser reescrito como $\pi_j = P_jy_j - \tilde{P}_jZ_j - \tilde{Q}_jF_j$. A escolha ótima de (Z_j, F_j) requer

$$\frac{\tilde{P}_j}{P_j} = \frac{\partial O_j}{\partial Z_j} = \eta_j[A_j]^{\sigma_j}[y_j/Z_j]^{1-\sigma_j} \tag{73}$$

$$\frac{\tilde{Q}_j}{P_j} = \frac{\partial O_j}{\partial F_j} = (1-\eta_j)[A_j]^{\sigma_j}[y_j/F_j]^{1-\sigma_j} \tag{74}$$

Logo, $\frac{\tilde{P}_j}{\tilde{Q}_j} = \frac{\tilde{P}_j}{P_j}/\frac{\tilde{Q}_j}{P_j} = \frac{\eta_j}{1-\eta_j}\left(\frac{F_j}{Z_j}\right)^{1-\sigma_j}$. Ou seja, $Z_j = \left(\frac{\tilde{Q}_j}{\tilde{P}_j}\frac{\eta_j}{1-\eta_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} F_j$. Este resultado em (1) produz

$$\begin{aligned}
F_j &= A_jO_j\left(\frac{1-\eta_j}{\tilde{Q}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}}/\left(\left[\frac{\eta_j}{\tilde{P}_j^{\sigma_j}}\right]^{\frac{1}{1-\sigma_j}} + \left[\frac{1-\eta_j}{\tilde{Q}_j^{\sigma_j}}\right]^{\frac{1}{1-\sigma_j}}\right)^{\frac{1}{\sigma_j}} = A_jO_j\left(\frac{1-\eta_j}{\tilde{Q}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}}/(\tilde{C}_jA_j)^{\frac{1}{\rho_j-1}} \\
Z_j &= A_jO_j\left(\frac{\eta_j}{\tilde{P}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}}/\left(\left[\frac{\eta_j}{\tilde{P}_j^{\sigma_j}}\right]^{\frac{1}{1-\sigma_j}} + \left[\frac{1-\eta_j}{\tilde{Q}_j^{\sigma_j}}\right]^{\frac{1}{1-\sigma_j}}\right)^{\frac{1}{\sigma_j}} = A_jO_j\left(\frac{\eta_j}{\tilde{P}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}}/(\tilde{C}_j/A_j)^{\frac{1}{\rho_j-1}}
\end{aligned}$$

em que já se usou a definição de $\tilde{C}_j$. As igualdades em (22) seguem diretamente desse resultado. Por fim, o custo total incorrido pela firma j é dado por $\tilde{P}_j Z_j + \tilde{Q}_j F_j = \tilde{C}_j y_j$, pois

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_j Z_j + \tilde{Q}_j F_j &= \frac{\tilde{P}_j A_j y_j}{(\tilde{C}_j/A_j^{\sigma_j})^{\frac{1}{\sigma_j-1}}} \left(\frac{\eta_j}{\tilde{P}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} + \frac{\tilde{Q}_j A_j y_j}{(\tilde{C}_j/A_j^{\sigma_j})^{\frac{1}{\sigma_j-1}}} \left(\frac{1-\eta_j}{\tilde{Q}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} \\
&= \frac{y_j}{(\tilde{C}_j/A_j^{\sigma_j})^{\frac{1}{\sigma_j-1}}} \left[\left(\frac{\eta_j}{\tilde{P}_j^{\sigma_j}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} + \left(\frac{1-\eta_j}{\tilde{Q}_j^{\sigma_j}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}}\right] = \frac{y_j}{(\tilde{C}_j/A_j^{\sigma_j})^{\frac{1}{\sigma_j-1}}} (\tilde{C}_j/A_j)^{\frac{\sigma_j}{\sigma_j-1}}
\end{aligned}$$

Conclui-se do exposto que o objetivo da firma j pode ser especializado para $\pi_j = (P_j - \tilde{C}_j) y_j$. Esta função de y_j é maximizada em algum ponto positivo e finito somente se $P_j = \tilde{C}_j$. $\square$

Lemma 3. *O comportamento ótimo do agente representativo requer*

$$z_{ict} = \left(\frac{\varphi_{ic} \hat{P}_t / P_{it}}{(a_i^c)^{\gamma_c}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}} C_t \tag{26}$$

$$h_{it}^s = \begin{cases} 0 & se\ \hat{W}_{it}/\hat{P}_t \leq \left(\frac{\partial U}{\partial L} / \frac{\partial U}{\partial C}\right) \varphi_{il} [L_t / \bar{h}_i]^{1-\gamma_l} \\ \bar{h}_i - \left(\frac{\varphi_{il} \hat{W}_t / \bar{W}_{it}}{(a_i^l)^{\gamma_l}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_l}} L_t & se\ \hat{W}_{it}/\hat{P}_t > \left(\frac{\partial U}{\partial L} / \frac{\partial U}{\partial C}\right) \varphi_{il} [L_t / \bar{h}_i]^{1-\gamma_l} \end{cases} \tag{27}$$

em que

$$\hat{P}_t \equiv \left(\sum_{n \in \mathcal{B}} \left(\frac{\varphi_{nc}}{(a_n^c P_{nt})^{\gamma_c}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}}\right)^{\frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c}} \tag{28}$$

$$\hat{W}_t \equiv \left(\sum_{n \in \mathcal{S}} \left[\frac{\varphi_{nl}}{(a_n^l \bar{W}_{nt})^{\gamma_l}}\right]^{\frac{1}{1-\gamma_l}}\right)^{\frac{\gamma_l - 1}{\gamma_l}} \tag{29}$$

Proof. Seja $\beta^t \mu_t \geq 0$ o multiplicado de Lagrange associado com a restrição orçamentária e $\beta^t \vartheta_i \geq 0$ o multiplicado de Lagrange associado com a restrição $0 \leq l_{it} = \bar{h}_{it} - h_{it}^s$. A escolha ótima de z_{ict} precisa satisfazer

$$\beta^t \left(\frac{\partial U_t}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial z_{ict}} - \mu_t P_{it}\right) \leq 0 \quad \text{e} \quad \beta^t \left(\frac{\partial U_t}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial z_{ict}} - \mu_t P_{it}\right) z_{ict} = 0 \tag{75}$$

em que $\frac{\partial U_t}{\partial C} > 0$ e $\frac{\partial C}{\partial z_{ict}} = \varphi_{ic} [C(z_{\cdot ct})/z_{ict}]^{1-\gamma_c} / (a_i^c)^{\gamma_c}$. Note que $\frac{\partial C}{\partial z_{ict}} \to \infty$ quando $z_{ict} \to 0$ se $\varphi_{ic} > 0$. Sejam i e i' tais que $\varphi_{ic} > 0$ e $\varphi_{i'c} > 0$. Logo, $z_{ict} > 0$ e $z_{i'ct} > 0$. Usando a condição (75), tem-se $z_{i'ct} = z_{ict} \left(\frac{\varphi_{i'c}}{\varphi_{ic}} \left(\frac{a_i^c}{a_{i'}^c}\right)^{\gamma_c} \frac{P_{it}}{P_{i't}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}}$, pois

$$\frac{P_{it}}{P_{i't}} = \frac{\mu_t P_{it}}{\mu_t P_{i't}} = \frac{\partial U}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial z_{ict}} \Big/ \frac{\partial U}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial z_{i'ct}} = \frac{\varphi_{ic} [C(z_{\cdot ct})/z_{ict}]^{1-\gamma_c} / (a_i^c)^{\gamma_c}}{\varphi_{i'c} [C(z_{\cdot ct})/z_{i'ct}]^{1-\gamma_c} / (a_{i'}^c)^{\gamma_c}} = \frac{\varphi_{ic}}{\varphi_{i'c}} \left(\frac{a_{i'}^c}{a_i^c}\right)^{\gamma_c} \left(\frac{z_{i'ct}}{z_{ict}}\right)^{1-\gamma_c}$$

Este resultado em (9) produz $z_{ict} = C \Big/ \left(\sum_{i' \in \mathcal{B}} \varphi_{i'c} \left(\frac{\varphi_{i'c}}{\varphi_{ic}} \left(\frac{a_i^c}{a_{i'}^c}\right)^{\gamma_c} \frac{P_{it}}{P_{i't}}\right)^{\frac{\gamma_c}{1-\gamma_c}}\right)^{\frac{1}{\gamma_c}}$. Substituindo de volta na relação entre z_{ict} e z_{ict} obtém-se $z_{i'ct} = \left(\frac{\varphi_{i'c}}{(a_{i'}^c)^{\gamma_c} P_{i't}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}} C \Big/ \left(\sum_{n \in \mathcal{B}} \varphi_{nc} \left(\frac{\varphi_{nc}}{(a_n^c)^{\gamma_c} P_{nt}}\right)^{\frac{\gamma_c}{1-\gamma_c}}\right)^{\frac{1}{\gamma_c}}$. Usando a definição de $\hat{P}_t$, tem-se $z_{i'\mathsf{c}t} = \left(\frac{\varphi_{i'c}\hat{P}/P_{i't}}{(a^c_{i'})^{\gamma_c}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}} C_t$ e o custo de aquisição de $z_{\cdot\mathsf{c}t}$ pode ser escrito como $\langle P, z_{\cdot\mathsf{c}t}\rangle = \hat{P}_t C_t$, pois $\langle P, z_{\cdot\mathsf{c}t}\rangle$ é igual a

$$\sum_{i\in\mathcal{B}} P_i z_{i\mathsf{c}t} = \sum_{i\in\mathcal{B}} P_{it}\left(\frac{\varphi_{ic}}{(a^c_i)^{\gamma_c}P_{it}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}} \hat{P}_t^{\frac{1}{1-\gamma_c}} C_t = C_t\hat{P}_t^{\frac{1}{1-\gamma_c}} \sum_{i\in\mathcal{B}}\left(\frac{\varphi_{ic}}{(a^c_i P_{it})^{\gamma_c}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}} = C\hat{P}_t^{\frac{1}{1-\gamma_c}}\hat{P}_t^{\frac{\gamma_c}{\gamma_c-1}}$$

Ainda, $\mu_t = \frac{\partial U}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial z_{i\mathsf{c}t}}/P_{it} = \frac{\partial U}{\partial C}[\left(\varphi_{ic}\hat{P}/P_{it}\right)^{\frac{1}{\gamma_c-1}}]^{1-\gamma_c}\varphi_{ic}/P_{it} = \frac{\partial U}{\partial C}\left(P_{it}/\varphi_{ic}\hat{P}\right)\varphi_{ic}/P_{it} = \frac{\partial U}{\partial C}/\hat{P}$.

Analogamente, a escolha ótima de $h^s_{it} = \bar{h}_i - l_{it}$ precisa satisfazer

$$\beta^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial l_{it}} + \vartheta_i\right)\frac{\partial l_{it}}{\partial h^s_{it}} + \mu_t\bar{W}_{it}\right] \le 0 \quad \text{e} \quad \beta^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial l_{it}} + \vartheta_i\right)\frac{\partial l_{it}}{\partial h^s_{it}} + \mu_t\bar{W}_{it}\right] h_{it} = 0 \tag{76}$$

em que $\frac{\partial L}{\partial l_i} = \varphi_{il}[L(l_{\cdot t})/l_{it}]^{1-\gamma_l}/(a^l_i)^{\gamma_l}$, $\frac{\partial l_{it}}{\partial h^s_{it}} = -1$ e $\frac{\partial U}{\partial L} > 0$ se $\nu < 1$, com $\frac{\partial U}{\partial L} = 0$ para todo L se $\nu = 1$. Suponha $i \in \mathcal{S}$ tal que $(1-\nu)\varphi_{il} = 0$, de forma que a desigualdade em (76) gera $\mu_t\bar{W}_i \le \vartheta_i$. Como $\mu_t > 0$, tem-se que $\vartheta_i > 0$ e, portanto, $h^s_{it} = \bar{h}_i$. Considere agora o caso de $i \in \mathcal{S}$ tal que $(1-\nu)\varphi_{il} > 0$, no qual $\frac{\partial U}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial l_{it}} \to \infty$ quando $l_{it} \to 0$. A igualdade em (76) exige que $h^s_{it} = 0$ para $l_{it} \approx 0$ e todo ϑ_i finito. Um contradição com $h^s_{it} + l_{it} = \bar{h}_i > 0$. Logo, $l_{it} = \bar{h}_i - h_{it} > 0$ é ótimo e, com isso, $\vartheta_i = 0$. A otimalidade de $h_{it} = 0$ requer $\mu_t\bar{W}_{it} \le \frac{\partial U}{\partial L}\varphi_{il}[L(l_{\cdot t})/\bar{h}_i]^{1-\gamma_l}/(a^l_i)^{\gamma_l}$ e a otimalidade de $h_{it} \in (0, \bar{h}_i)$ requer $\mu_t\bar{W}_{it} = \frac{\partial U}{\partial L}\varphi_{il}[L(l_{\cdot t})/(\bar{h}_i - h_{it})]^{1-\gamma_l}/(a^l_i)^{\gamma_l}$.

Suponha $\left(\frac{\partial U}{\partial L}\varphi_{il}[L(l_{\cdot t})/\bar{h}_i]^{1-\gamma_l}/(a^l_i)^{\gamma_l} - \mu_t\bar{W}_{it}\right) < 0$, de forma que $h_{it} = \bar{h}_i - l_{it} > 0$. Seja i' tal que $(1-\nu)\varphi_{i'l}\left(\mu_t\bar{W}_{i't} - \frac{\partial U}{\partial L}\varphi_{i'l}[L(l_{\cdot t})/\bar{h}_{i'}]^{1-\gamma_l}/(a^l_i)^{\gamma_l}\right) > 0$ e, com isso, $l_{i't} = \bar{h}_{i'} - h_{i't} > 0$. Usando a condição (76), tem-se $\bar{h}_{i'} - h_{i't} = \left[\frac{\varphi_{i'l}}{\varphi_{il}}\left(\frac{a^l_i}{a^l_{i'}}\right)^{\gamma_l}\frac{\bar{W}_{it}}{\bar{W}_{i't}}\right]^{\frac{1}{1-\gamma_l}}(\bar{h}_i - h_{it})$, pois

$$\frac{\bar{W}_{it}}{\bar{W}_{i't}} = \frac{\mu_t\bar{W}_{it}}{\mu_t\bar{W}_{i't}} = \frac{\frac{\partial U}{\partial L}\frac{\varphi_{il}}{(a^l_i)^{\gamma_l}}\left[L(l_{\cdot t})/(\bar{h}_i - h_{it})\right]^{1-\gamma_l}}{\frac{\partial U}{\partial L}\frac{\varphi_{i'l}}{(a^l_{i'})^{\gamma_l}}\left[L(l_{\cdot t})/(\bar{h}_{i'} - h_{i't})\right]^{1-\gamma_l}} = \frac{\varphi_{il}}{\varphi_{i'l}}\left(\frac{a^l_{i'}}{a^l_i}\right)^{\gamma_l}\left[\frac{\bar{h}_{i'} - h_{i't}}{\bar{h}_i - h_{it}}\right]^{1-\gamma_l} \tag{77}$$

Este resultado em (9) produz

$$L(l_{\cdot t}) = \left(\sum_{i'\in\mathcal{S}}\varphi_{i'l}\left(\frac{\bar{h}_{i'} - h_{i't}}{a^l_{i'}}\right)^{\gamma_l}\right)^{\frac{1}{\gamma_l}} = (\bar{l}_i - h_{it})\left[\frac{(a^l_i)^{\gamma_l}\bar{W}_{it}}{\varphi_{il}}\right]^{\frac{1}{1-\gamma_l}}\left(\sum_{i'\in\mathcal{S}}\frac{\varphi_{i'l}}{(a^l_{i'})^{\gamma_l}}\left[\frac{\varphi_{i'l}/\bar{W}_{i't}}{(a^l_{i'})^{\gamma_l}}\right]^{\frac{\gamma_l}{1-\gamma_l}}\right)^{\frac{1}{\gamma_l}}$$

Usando a definição de $\hat{W}_t$, tem-se $\bar{l}_i - h_{it} = \left(L(\cdot)/\hat{W}_t^{\frac{1}{\gamma_l-1}}\right)\left[\varphi_{il}/(a^l_i)^{\gamma_l}\bar{W}_{it}\right]^{\frac{1}{1-\gamma_l}}$. Substituindo de volta na relação entre h_{it} e $h_{i't}$, tem-se $h^s_{i't} = \bar{l}_{i'} - \left(L(\cdot)/\hat{W}_t^{\frac{1}{\gamma_l-1}}\right)\left[\varphi_{i'l}/(a^l_{i'})^{\gamma_l}\bar{W}_{i't}\right]^{\frac{1}{1-\gamma_l}}$. Conclui-se disto que a renda total do trabalho é dada por $\sum_{i'\in\mathcal{S}}\bar{W}_{i't}h^s_{i't} = \langle W_{\cdot}, \bar{h}_{\cdot}\rangle - L(\cdot)\hat{W}_t$, pois

$$\begin{aligned}\sum_{i'\in\mathcal{S}}\bar{W}_{i't}h^s_{i't} &= \sum_{i'\in\mathcal{S}}\bar{W}_{i't}\bar{h}_{i'} - \sum_{i'\in\mathcal{S}}\bar{W}_{i't}\left(L/\hat{W}_t^{\frac{1}{\gamma_l-1}}\right)\left[\varphi_{i'l}/(a^l_{i'})^{\gamma_l}\bar{W}_{i't}\right]^{\frac{1}{1-\gamma_l}} \\ &= \langle W_{\cdot}, \bar{h}_{\cdot}\rangle - \left(L/\hat{W}_t^{\frac{1}{\gamma_l-1}}\right)\sum_{i'\in\mathcal{S}}\left[\varphi_{i'l}/(a^l_{i'}\bar{W}_{i't})^{\gamma_l}\right]^{\frac{1}{1-\gamma_l}} = \langle\bar{W}_{\cdot}, \bar{h}_{\cdot}\rangle - L\left(\hat{W}_t^{\frac{\gamma_l}{\gamma_l-1}}/\hat{W}_t^{\frac{1}{\gamma_l-1}}\right)\end{aligned}$$

□

Lemma 8. *Suponha que* $(\{Q_t\}_{t\in\mathbb{N}}, \{X_t\}_{t\in\mathbb{N}})$ *é um equilíbrio competitivo estacionário quando as constantes de normalização são dada por* $\left(a_{ij}^z, a_{ij}^k, a_{ij}^h\right)$ *e* $\left(a_i^c, a_i^l, a_i^{\mathrm{k}}\right)$*. Para cada* $(i,j,n) \in \mathcal{B}\times\mathcal{B}\times\mathcal{S}$*, defina* $\bar{P}_{ij} = \bar{R}_{ij} = \bar{W}_{nj} = 1$ *e*

$$\bar{a}_{ij}^z = \frac{a_{ij}^z P_i}{P_j}, \quad \bar{a}_{ij}^k = \frac{a_{ij}^k R_{ij}}{P_j}, \quad \bar{a}_{ij}^h = \frac{a_{ij}^h W_{ij}}{P_j}, \quad \bar{a}_i^c = a_i^c P_i, \quad \bar{a}_{nj}^l = \frac{a_{nj}^l W_{ij}}{P_j}, \quad \bar{a}_i^{\mathrm{k}} = \frac{a_i^{\mathrm{k}} P_i}{R_i} \tag{78}$$

em que $P = \{P_j\}_{j\in\mathcal{B}}$*,* $R = \{R_{ij}\}_{j\in\mathcal{B}}$ *e* $W = \{W_{ij}\}_{j\in\mathcal{B}}$ *são tais que* $Q_t = (P,R,W)$ *para cada* $t\in\mathbb{N}$*. Para* $\bar{P} = \{\bar{P}_j\}_{j\in\mathcal{B}}$*,* $\bar{R} = \{\bar{R}_{ij}\}_{j\in\mathcal{B}}$ *e* $\bar{W} = \{\bar{W}_{ij}\}_{j\in\mathcal{B}}$*, seja* $\bar{Q}_t = (\bar{P},\bar{R},\bar{W})$ *para cada* $t\in\mathbb{N}$*. Então,* $\{\bar{Q}_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ *é vetor de preços de equilíbrio competitivo estacionário se as constantes de normalização são dada por* $\left(\bar{a}_{ij}^z, \bar{a}_{ij}^k, \bar{a}_{ij}^h\right)$ *e* $\left(\bar{a}_{ij}^c, \bar{a}_{ij}^l\right)$*.*

Proof. Para cada $t\in\mathbb{N}$, a partir de $X_t = \left(\left\{y_j, (z_{ij}, k_{ij})_{i\in\mathcal{B}}, (h_{ij})_{i\in\mathcal{S}}\right\}_{j\in\mathcal{B}}, (l_i)_{i\in\mathcal{S}}, (z_{i\mathrm{c}}, z_{i\mathrm{k}})_{i\in\mathcal{B}}\right)$, defina $\bar{X}_t = \left(\left\{\bar{y}_j, (\bar{z}_{ij}, \bar{k}_{ij})_{i\in\mathcal{B}}, (\bar{h}_{ij})_{i\in\mathcal{S}}\right\}_{j\in\mathcal{B}}, (\bar{l}_i)_{i\in\mathcal{S}}, (\bar{z}_{i\mathrm{c}}, \bar{z}_{i\mathrm{k}})_{i\in\mathcal{B}}\right)$ tal que $\bar{y}_j = P_j y_j$, $\bar{z}_{ij} = P_i z_{ij}$, $\bar{k}_{ij} = R_{ij} k_{ij}$, $\bar{h}_{ij} = W_{ij} h_{ij}$, $\bar{l}_i = W_{ij} l_i$, $\bar{z}_{i\mathrm{c}} = P_i z_{i\mathrm{c}}$ e $\bar{z}_{i\mathrm{k}} = P_i z_{i\mathrm{k}}$. Como X_t satisfaz as condições de igualdade entre oferta e demanda (14) a (16), então

$$\sum_{j\in\mathcal{B}} \bar{h}_{ijt} = \sum_{j\in\mathcal{B}} W_{ij} h_{ijt} = W_i \sum_{j\in\mathcal{B}} h_{ijt} \;\leq\; W_i h_{it}^s = \bar{h}_{it}^s, \qquad \forall i\in\mathcal{S} \tag{79}$$

$$\sum_{j\in\mathcal{B}} \bar{k}_{ijt} = \sum_{j\in\mathcal{B}} R_i k_{ijt} = R_i \sum_{j\in\mathcal{B}} k_{ijt} \;\leq\; R_{it}^s k_{it}^s = \bar{k}_{it}^s, \qquad \forall i\in\mathcal{B} \tag{80}$$

$$\sum_{j\in\mathcal{B}} \bar{z}_{ijt} + \bar{z}_{i\mathrm{c}t} + \bar{z}_{i\mathrm{k}t} = P_i\left(\sum_{j\in\mathcal{B}} z_{ijt} + z_{i\mathrm{c}t} + z_{i\mathrm{k}t}\right) \;\leq\; P_i y_{it} = \bar{y}_{it}, \qquad \forall i\in\mathcal{B}. \tag{81}$$

Para ver que, dada a sequência $\{\bar{Q}_t\}$, o vetor $\left\{\bar{y}_j, (\bar{z}_{ij}, \bar{k}_{ij})_{i\in\mathcal{B}}, (\bar{h}_{ij})_{i\in\mathcal{S}}\right\}$ resolve o problema (6) sob a normalização (78), observe que dada a sequência $\{Q_t\}$, o vetor $\{y_j, (z_{ij}, k_{ij})_{i\in\mathcal{B}}, (h_{ij})_{i\in\mathcal{S}}\}$ resolve o problema (6) sob a normalização definida por $\left(a_{ij}^z, a_{ij}^k, a_{ij}^h\right)$ e $\left(a_{ij}^c, a_{ij}^l\right)$. Com isso, $\{y_j, (z_{ij}, k_{ij})_{i\in\mathcal{B}}, (h_{ij})_{i\in\mathcal{S}}\}$

satisfaz (17), (18) e (19). Multiplicando (17) por P_i, (18) por R_j e (19) por W_j obtém-se

$$\begin{aligned}
\bar{z}_{ij} = P_i z_{ij} &= P_i \left(\frac{\alpha_{ij} \tilde{P}_j(P;a^z)/P_i}{\left(A_j^Z a_{ij}^z\right)^{\zeta_j}} \right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}} Z_j(z_{\cdot j}) = \left(\frac{\alpha_{ij} \tilde{P}_j(P;a^z)}{\left(A_j^Z a_{ij}^z P_i\right)^{\zeta_j}} \right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}} Z_j(z_{\cdot j}) \\
&= \left(\frac{\alpha_{ij} \tilde{P}_j(P;a^z)}{\left(A_j^Z \bar{a}_{ij}^z P_j\right)^{\zeta_j}} \right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}} Z_j(z_{\cdot j}) = \left(\frac{\alpha_{ij} \tilde{P}_j(\bar{P};\bar{a}^z)}{\left(A_j^Z \bar{a}_{ij}^z \bar{P}_i\right)^{\zeta_j}} \right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}} P_j Z_j(z_{\cdot j}), \\
\bar{k}_{ij} = R_i k_{ij} &= R_i \left(\frac{\kappa_{ij} \tilde{R}_j(R;a^k)/R_{ij}}{\left(A_j^K a_{ij}^k\right)^{\lambda_{kj}}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}} K_j(k_{\cdot j}) = \left(\frac{\kappa_{ij} \tilde{R}_j(R;a^k)}{\left(A_j^K a_{ij}^k R_i\right)^{\lambda_{kj}}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}} K_j(k_{\cdot j}) \\
&= \left(\frac{\kappa_{ij} \tilde{R}_j(R;a^k)}{\left(A_j^K \bar{a}_{ij}^k P_j\right)^{\lambda_{kj}}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}} K_j(k_{\cdot j}) = \left(\frac{\kappa_{ij} \tilde{R}_j(\bar{R};\bar{a}^k)}{\left(A_j^K \bar{a}_{ij}^k \bar{R}_j\right)^{\lambda_{kj}}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}} P_j K_j(k_{\cdot j}) \\
\bar{h}_{ij} = W_i h_{ij} &= W_i \left(\frac{\omega_{ij} \tilde{W}_j/W_{ij}}{\left(A_j^H a_{ij}^h\right)^{\lambda_{hj}}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}} H_j(h_{\cdot j}) = \left(\frac{\omega_{ij} \tilde{W}_j}{\left(A_j^H a_{ij}^h W_i\right)^{\lambda_{hj}}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}} H_j(h_{\cdot j}) \\
&= \left(\frac{\omega_{ij} \tilde{W}_j(W;a^h)}{\left(A_j^H \bar{a}_{ij}^h P_j\right)^{\lambda_{hj}}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}} H_j(h_{\cdot j}) = \left(\frac{\omega_{ij} \tilde{W}_j(\bar{W};\bar{a}^h)}{\left(A_j^H \bar{a}_{ij}^h \bar{W}_j\right)^{\lambda_{hj}}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}} P_j H_j(h_{\cdot j})
\end{aligned}$$

em que se usou as igualdades $\tilde{P}_j(\bar{P};\bar{a}^z) = \tilde{P}_j(P;a^z)/P_j$, $\tilde{R}_j(\bar{R};\bar{a}^k) = \tilde{R}_j(P;a^k)/P_j$ e $\tilde{W}_j(\bar{W};\bar{a}^h) = \tilde{W}_j(W;a^h)/P_j$, as quais decorrem de

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{P}_j\left(P;a^z\right)}{A_j^Z P_j} &= \left(\sum_{n\in\mathcal{B}} \left(\frac{\alpha_{nj}}{\left(a_{nj}^z P_n/P_j\right)^{\zeta_j}} \right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}} \right)^{\frac{\zeta_j-1}{\zeta_j}} = \left(\sum_{n\in\mathcal{B}} \left(\frac{\alpha_{nj}}{\left(\bar{a}_{nj}^z \bar{P}_n\right)^{\zeta_j}} \right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}} \right)^{\frac{\zeta_j-1}{\zeta_j}} \\
\frac{\tilde{R}_j(P;a^k)}{A_j^K P_j} &= \left(\sum_{n\in\mathcal{B}} \left(\frac{\kappa_{nj}}{(a_{nj}^k R_{nj}/P_j)^{\lambda_{kj}}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}} \right)^{\frac{\lambda_{kj}-1}{\lambda_{kj}}} = \left(\sum_{n\in\mathcal{B}} \left(\frac{\kappa_{nj}}{\left(\bar{a}_{nj}^k \bar{R}_{nj}\right)^{\lambda_{kj}}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}} \right)^{\frac{\lambda_{kj}-1}{\lambda_{kj}}} \\
\frac{\tilde{W}_j(W;a^h)}{A_j^H P_j} &= \left(\sum_{n\in\mathcal{S}} \left(\frac{\omega_{nj}}{(a_{nj}^h W_{nj}/P_j)^{\lambda_{hj}}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}} \right)^{\frac{\lambda_{hj}-1}{\lambda_{hj}}} = \left(\sum_{n\in\mathcal{S}} \left(\frac{\omega_{nj}}{\left(\bar{a}_{nj}^h \bar{W}_{nj}\right)^{\lambda_{hj}}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}} \right)^{\frac{\lambda_{hj}-1}{\lambda_{hj}}}
\end{aligned}$$

Agora, usando (21) e (22), tem-se

$$\frac{P_j K_j}{P_j F_j} = \left(\frac{\theta_j \tilde{Q}_j(\tilde{R}(R;a^k), \tilde{W}(W;a^h))}{(A_j^F)^{\rho_j} \tilde{R}_j(R;a^k)} \right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} = \left(\frac{\theta_j P_j \tilde{Q}_j(\tilde{R}(\bar{R};\bar{a}^k), \tilde{W}(\bar{W};\bar{a}^h))}{(A_j^F)^{\rho_j} P_j \tilde{R}_j(\bar{R};\bar{a}^k)} \right)^{\frac{1}{1-\rho_j}},$$

$$\frac{P_j H_j}{P_j F_j} = \left(\frac{(1-\theta_j) \tilde{Q}_j(\tilde{R}(R;a^k), \tilde{W}(W;a^h))}{(A_j^F)^{\rho_j} \tilde{W}_j(W;a^h)} \right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} = \left(\frac{(1-\theta_j) P_j \tilde{Q}_j(\tilde{R}(\bar{R};\bar{a}^k), \tilde{W}(\bar{W};\bar{a}^h))}{(A_j^F)^{\rho_j} P_j \tilde{W}_j(\bar{W};\bar{a}^h)} \right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}$$

$$P_j Z_j = \left(\frac{\eta_j \tilde{C}_j[\tilde{P}_j(P;a^z), \tilde{Q}_j]}{(A_j)^{\sigma_j} \tilde{P}_j(P;a^z)} \right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} P_j y_j = \left(\frac{\eta_j \tilde{C}_j[\tilde{P}_j(\bar{P};\bar{a}^z) P_j, \tilde{Q}_j]/P_j}{(A_j)^{\sigma_j} \tilde{P}_j(\bar{P};\bar{a}^z)} \right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} \bar{y}_j,$$

$$P_j F_j = \left(\frac{(1-\eta_j) \tilde{C}_j}{(A_j)^{\sigma_j} \tilde{Q}_j(\tilde{R}(R;a^k), \tilde{W}(W;a^h))} \right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} P_j y_j = \left(\frac{(1-\eta_j) \tilde{C}_j/P_j}{(A_j)^{\sigma_j} \tilde{Q}_j(\tilde{R}(\bar{R};\bar{a}^k), \tilde{W}(\bar{W};\bar{a}^h))} \right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} \bar{y}_j,$$

Para ver que, dada a sequência $\{\bar{Q}_t\}$, o vetor $\left(\left\{(\bar{k}_{ijt})_{i\in\mathcal{B}}, (\bar{h}_{ijt})_{i\in\mathcal{S}}\right\}_{j\in\mathcal{B}}, (\bar{l}_{it})_{i\in\mathcal{S}}, (\bar{z}_{ict}, \bar{z}_{i\mathtt{k}t})_{i\in\mathcal{B}}\right)$ resolve o problema (12) sob a normalização (78), observe que, dada a sequência $\{Q_t\}$, o vetor $\Big(\left\{(k_{ijt})_{i\in\mathcal{B}}, (h_{ijt})_{i\in\mathcal{S}}\right\}_{j\in\mathcal{B}}, ($ resolve o problema (12) sob a normalização definida por $\left(a^z_{ij}, a^k_{ij}, a^h_{ij}\right)$ e $\left(a^c_{ij}, a^l_{ij}\right)$. Com isso, $\Big(\left\{(k_{ijt})_{i\in\mathcal{B}}, (h_{ijt})_{i\in\mathcal{S}}\right\}$ satisfaz (26), (27). Multiplicando (26) por P_i e (27) por W_i, obtém-se

$$
\begin{aligned}
\bar{z}_{ict} = P_i z_{ict} &= P_i \left(\frac{\varphi_{ic}\hat{P}_t(P;a^c)/P_{it}}{(a^c_i)^{\gamma_c}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}} C_t = \left(\frac{\varphi_{ic}\hat{P}_t(P;a^c)}{(a^c_i P_i)^{\gamma_c}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}} C_t \\
&= \left(\frac{\varphi_{ic}\hat{P}_t(\bar{P};\bar{a}^c)}{(\bar{a}^c_i)^{\gamma_c}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}} C_t = \left(\frac{\varphi_{ic}\hat{P}_t(\bar{P};\bar{a}^c)/\bar{P}_i}{(\bar{a}^c_i)^{\gamma_c}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}} C_t \\
\bar{h}^s_{it} = W_i h^s_{it} &= W_i \bar{l}_i - W_i \left(\frac{\varphi_{il}\hat{W}_t(W;a^l)/W_i}{(a^l_i)^{\gamma_l}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_l}} L_t = \bar{\bar{l}}_i - \left(\frac{\varphi_{il}\hat{W}_t(W;a^l)}{(a^l_i W_i)^{\gamma_l}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_l}} L_t \\
&= \bar{\bar{l}}_i - \left(\frac{\varphi_{il}\hat{W}_t(\bar{W};\bar{a}^l)}{(\bar{a}^l_i)^{\gamma_l}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_l}} L_t = \bar{\bar{l}}_i - \left(\frac{\varphi_{il}\hat{W}_t(\bar{W};\bar{a}^l)/\bar{W}_i}{(\bar{a}^l_i)^{\gamma_l}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_l}} L_t
\end{aligned}
$$

em que se usou as igualdades $\hat{P}_t(P;a^c) = \hat{P}_t(\bar{P};\bar{a}^c)$ e $\hat{W}_t(P;a^c) = \hat{W}_t(\bar{W};\bar{a}^l)$.

Usando o fato de que $\left(\left\{(k_{ijt})_{i\in\mathcal{B}}, (h_{ijt})_{i\in\mathcal{S}}\right\}_{j\in\mathcal{B}}, (l_{it})_{i\in\mathcal{S}}, (z_{ict}, z_{i\mathtt{k}t})_{i\in\mathcal{B}}\right)$ satisfaz (32), (33) e (34), pode-se verificar que $\left(\left\{(\bar{k}_{ijt})_{i\in\mathcal{B}}, (\bar{h}_{ijt})_{i\in\mathcal{S}}\right\}_{j\in\mathcal{B}}, (\bar{l}_{it})_{i\in\mathcal{S}}, (\bar{z}_{ict}, \bar{z}_{i\mathtt{k}t})_{i\in\mathcal{B}}\right)$ satisfaz a restrição orçamentária

$$
\begin{aligned}
0 &= \hat{P}_t(P;a^c)C_t + \sum_i P_{it}a^{\mathtt{k}}_i(k_{i,t+1} - (1-\delta)k_{it}) + L_t\hat{W}_t(W;a^l) - \langle W_{\cdot t}, \bar{h}_{\cdot}\rangle - \sum_{i\in\mathcal{B}} \hat{R}_{it}k_{it} \\
&= \hat{P}_t(\bar{P};\bar{a}^c)C_t + \sum_i \bar{a}^{\mathtt{k}}_i \delta \bar{k}_{it} + L_t\hat{W}_t(\bar{W};\bar{a}^l) - \sum_{i\in\mathcal{S}} \bar{\bar{h}}_i - \sum_{i\in\mathcal{B}} \bar{k}_{it},
\end{aligned}
$$

a condição de otimalidade entre o índice de consumo C_t e o índice de lazer L_t

$$
\frac{\partial U/\partial L_t}{\partial U/\partial C_t} = \frac{\hat{W}_t(W;a^l)}{\hat{P}_t(P;a^c)} = \frac{\hat{W}_t(\bar{W};\bar{a}^l)}{\hat{P}_t(\bar{P};\bar{a}^c)} \tag{82}
$$

e a equação de Euler

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{P_{it}/\hat{P}_t(P_t;a^l)}{P_{i,t+1}/\hat{P}_{t+1}(P_{t+1};a^l)} - \beta\frac{\partial U/\partial C_{t+1}}{\partial U/\partial C_t}\left[1-\delta+\frac{\hat{R}_{i,t+1}}{P_{i,t+1}a^{\mathtt{k}}_i}\right] = \beta\left[1-\delta+\frac{1}{\bar{a}^{\mathtt{k}}_i}\right] \\
&= 1-\beta\left[1-\delta+\bar{R}_i/\bar{P}_i\bar{a}^{\mathtt{k}}_i\right] = \frac{\bar{P}_{it}/\hat{P}_t(\bar{P}_t;\bar{a}^l)}{\bar{P}_{i,t+1}/\hat{P}_{t+1}(\bar{P}_{t+1};\bar{a}^l)} - \beta\frac{\partial U/\partial C_{t+1}}{\partial U/\partial C_t}\left[1-\delta+\frac{\bar{R}_{i,t+1}}{\bar{P}_{i,t+1}\bar{a}^{\mathtt{k}}_i}\right]
\end{aligned}
$$

□

Lemma 9. *Suponha que* $(\{Q_t\}_{t\in\mathbb{N}}, \{X_t\}_{t\in\mathbb{N}})$ *é um equilíbrio competitivo estacionário quando as constantes de normalização são dada por* $\left(a^z_{ij}, a^k_{ij}, a^h_{ij}\right)$, $\left(a^c_i, a^l_i, a^{\mathtt{k}}_i\right)$ *e* $\left(a^{\mathtt{g}}_i, a^{\mathtt{gk}}_i\right)$. *Para cada* $(i,j,n) \in \mathcal{B}\times$

$\mathcal{B}\times\mathcal{S}$, defina $\bar{P}_{ij}=\bar{R}_{ij}=\bar{W}_{nj}=1$ e

$$\bar{a}^z_{ij}=\frac{a^z_{ij}p_{ij}}{p_j},\quad \bar{a}^k_{ij}=\frac{a^k_{ij}R_{ij}}{p_j},\quad \bar{a}^h_{ij}=\frac{a^h_{ij}W_{ij}}{p_j},\quad \bar{a}^l_{nj}=\frac{a^l_{nj}W_{ij}}{P_j},\quad \bar{a}^c_i=a^c_iP_i,\quad \bar{a}^{\mathrm{k}}_i=\frac{a^{\mathrm{k}}_iP_i}{R_i} \tag{83}$$

$$\bar{a}^{\mathrm{g}}_i=a^{\mathrm{g}}_iP^{\mathrm{g}}_i,\quad \bar{a}^{\mathrm{gk}}_i=\frac{a^{\mathrm{gk}}_iP_i}{R_i} \tag{84}$$

em que $P=\{P_j\}_{j\in\mathcal{B}}$, $R=\{R_{ij}\}_{j\in\mathcal{B}}$ e $W=\{W_{ij}\}_{j\in\mathcal{B}}$ são tais que $Q_t=(P,R,W)$ para cada $t\in\mathbb{N}$. Para $\bar{P}=\{\bar{P}_j\}_{j\in\mathcal{B}}$, $\bar{R}=\{\bar{R}_{ij}\}_{j\in\mathcal{B}}$ e $\bar{W}=\{\bar{W}_{ij}\}_{j\in\mathcal{B}}$, seja $\bar{Q}_t=(\bar{P},\bar{R},\bar{W})$ para cada $t\in\mathbb{N}$. Então, $\{\bar{Q}_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ é vetor de preços de equilíbrio competitivo estacionário se as constantes de normalização são dada por $\left(\bar{a}^z_{ij},\bar{a}^k_{ij},\bar{a}^h_{ij}\right)$ e $\left(\bar{a}^c_{ij},\bar{a}^l_{ij}\right)$.

Proof. As similaridades do problema governamental produtivo com o problema privado produtivo e do problema governamental de consumo e investimento com problema privado de consumo e investimento permitem adaptar de forma direta a demonstração do lema 8 a fim de provar o atual lema. □

B Computação de equilíbrio competitivo estacionário

B.1 Economia Intersetorial *sem* Governo

Considere o comportamento de longo prazo da economia, no qual houve convergência para um equilíbrio estacionário. Note que no equilíbrio estacionário $C_{t+1}=C_t$ e, portanto, a condição (34) define $\bar{R}_{i,t+1}=[1/\beta-(1-\delta)]\,P_{i,t+1}a^{\mathrm{k}}_i$ para cada $i\in\mathcal{B}$ e cada $t+1\in\mathbb{N}$ tais que $k_{i,t+1}>0$, pois

$$\beta\left[1-\delta+\frac{\hat{R}_{i,t+1}}{P_{i,t+1}a^{\mathrm{k}}_i}\right]=\beta\frac{\partial U/\partial C_{t+1}}{\partial U/\partial C_t}\left[1-\delta+\frac{\hat{R}_{i,t+1}}{P_{i,t+1}a^{\mathrm{k}}_i}\right]=\frac{P_{it}/\hat{P}_t}{P_{i,t+1}/\hat{P}_{t+1}}=1,\qquad \text{se } k_{i,t+1}>0$$

para $i\in\mathcal{B}$.

Suponha adicionalmente que exista somente um tipo de trabalho. Ou seja, suponha que $s=1$. Usando a homogeneidade de grau zero do sistema definido por (14), (15) e (16), o preço W_{1t} pode ser normalizado para a unidade. Considere o seguinte algoritmo construído a partir dessas condições.

Algoritmo 1 (Equilíbrio Competitivo Estacionário)**.** *Normalizando $W_{1t}=W_{1\infty}=1$ para cada $t\in\mathbb{N}$, proceda de acordo com os passos a seguir:*

(i) calcule $\tilde{W}_{\cdot\infty}$ como a solução $\tilde{W}_{jt}$ em (19) quando $W_{1jt}=\bar{W}_{1\infty}$.

(ii) defina $p=0$ e escolha um palpite inicial $(P_{\cdot\infty})^0\in\mathbb{R}^b_{++}$ para $P_{\cdot t}=P_{\cdot\infty}$ para todo t.

(iii) usando $(R_{\cdot\infty})^p\equiv[1/\beta-(1-\delta)]\,(P_{\cdot\infty})^pa^{\mathrm{k}}_i$, calcule $(\tilde{R}_{\cdot\infty})^p$ como a solução $\tilde{R}_{jt}$ em (18) quando $R_{ijt}=(R_{i\infty})^p$.

(iv) calcule $(\tilde{Q}_{\cdot\infty})^p$ como a solução $\tilde{Q}_{jt}$ em (23) quando $\tilde{R}_j=(\tilde{R}_{\cdot\infty})^p$ e $\tilde{W}_j=\tilde{W}_{\cdot\infty}$.

(v) calcule $(\tilde{P}_{\cdot\infty})^p$ como a solução $\tilde{P}_j$ em (23) quando $P_j=(P_{\cdot\infty})^p$

(vi) *calcule* $(P_{\cdot\infty})^{p+1}$ *como a solução* $\tilde{C}_j$ *em (24), quando* $\tilde{Q}_j = (\tilde{Q}_{j\infty})^p$ *e* $\tilde{P}_j = (\tilde{P}_{\cdot\infty})^p$

(vii) *se* $\left\|(P_{\cdot\infty})^{p+1} - (P_{\cdot\infty})^p\right\| \approx 0$*, prossiga para o passo (viii). Caso contrário, incremente* p *em uma unidade e retorne ao passo (iii).*

(viii) *usando* $P_{\cdot\infty} \equiv \lim_{p\to\infty}(P_{\cdot\infty})^p$*, calcule* $\tilde{P}_{\cdot\infty}$ *como a solução* $\tilde{P}_j$ *em (23) quando* $P_{\cdot t} = P_{\cdot\infty}$.

(ix) *usando* $P_{\cdot\infty}$*, calcule* $\hat{P}_{\cdot\infty}$ *como a solução* $\hat{P}_j$ *em (28) quando* $P_{\cdot t} = P_{\cdot\infty}$ *e* $\hat{W}_{\cdot\infty}$ *como a solução* $\hat{W}_j$ *em (29) quando* $\bar{W}_{\cdot t} = \bar{W}_{\cdot\infty}$.

(x) *calcule* $(C_\infty, k_{\cdot\infty}, y_{\cdot\infty})$ *como solução do sistema linear com* $1 + 2b$ *equações construído da seguinte forma:*

- *visto que* $\frac{\partial U/\partial L}{\partial U/\partial C} = \frac{1-\nu}{\nu}\left(\frac{C}{L}\right)^{1-\gamma}$*, a condição (33) define a seguinte equação linear em* (L_∞, C_∞)*:*

$$L_\infty = \left(\frac{\hat{P}_\infty}{\hat{W}_\infty}\frac{1-\nu}{\nu}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} C_\infty \tag{85}$$

  Usando esta equação no caso não nulo de (27), obtém-se um sistema linear em $(C_\infty, h_{\cdot\infty})$ *definido por*

$$h^s_{i\infty} = \bar{h}_i - \left(\frac{\varphi_{il}\hat{W}_\infty/\bar{W}_{i\infty}}{\left(a^l_i\right)^{\gamma_l}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_l}} \left(\frac{\hat{P}_\infty}{\hat{W}_\infty}\frac{1-\nu}{\nu}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} C_\infty, \quad \forall i \in \mathcal{S} \tag{86}$$

- *usando (22) em (17),* z_{ij} *pode ser escrito como proporção de* y_j*. Usando esta relação de proporcionalidade entre os vetores* $z_{i\cdot} \in \mathbb{R}^b_+$ *e* $y \in \mathbb{R}^b_+$ *e a condição (26) na condição de equilíbrio (16), obtém-se um sistema linear em* $(C_\infty, k_{\cdot\infty}, y_{\cdot\infty})$ *com* b *equações.*
- *usando (18), (21) e (22),* k_{ij} *pode ser escrito como proporção de* y_j*. Usando esta relação de proporcionalidade entre os vetores* $k_{i\cdot} \in \mathbb{R}^b_+$ *e* $y \in \mathbb{R}^b_+$ *na condição de equilíbrio (15), obtém-se um sistema linear em* $(k_{\cdot\infty}, y_{\cdot\infty})$ *com* m *equações.*
- *usando (19), (21) e (22),* h_{ij} *pode ser escrito como proporção de* y_j*. Usando na condição de equilíbrio (14) a condição de otimalidade (86) e esta relação de proporcionalidade entre os vetores* $h_{i\cdot} \in \mathbb{R}^b_+$ *e* $y \in \mathbb{R}^b_+$*, obtém-se um sistema linear em* $(C_\infty, y_{\cdot\infty})$ *com* s *equações. Somando as equações deste sistema, obtém-se uma equação linear em* $(C_\infty, y_{\cdot\infty})$.

B.2 Economia Intersetorial *com* governo

A similaridade já discutida do problema da atividade governamental $j \in \mathcal{G}$, apresentado em (38), com o problema resolvido pela empresa competitiva $j \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{G}$, apresentado em (50), permite tratar numericamente o problema do setor produtivo de maneira unificada. Neste caso, os preços implícitos $R^{\mathfrak{g}}_{ijt}$ e $P^{\mathfrak{g}}_{jt}$ são tratados *numericamente* como preços de mercado e são denotados por R_{ijt} e P_{jt}, respectivamente. Como consequência, o algoritmo 1 pode ser generalizado de maneira direta para acomodar a existência de um governo, conforme descrito a seguir.

Considere o comportamento de longo prazo da economia, no qual houve convergência para um equilíbrio estacionário e $(\tau_{jt}, \phi_{ijt}) = (\tau_{j\infty}, \phi_{ij\infty}) \in \mathbb{R}^2_+$ para cada $(i,j) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ e todo $t \in \mathbb{N}$. Note que no equilíbrio estacionário $C_{t+1} = C_t$ e, portanto, a condição (34) define $\bar{R}_{i,t+1} = [1/\beta - (1-\delta)]\, P_{i,t+1} a_i^{\mathtt{k}}$ para cada $i \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{G}$ e cada $t+1 \in \mathbb{N}$ tais que $k_{i,t+1} > 0$, pois

$$\beta \left[1 - \delta + \frac{\hat{R}_{i,t+1}}{P_{i,t+1} a_i^{\mathtt{k}}}\right] = \beta \frac{\partial U/\partial C_{t+1}}{\partial U/\partial C_t} \left[1 - \delta + \frac{\hat{R}_{i,t+1}}{P_{i,t+1} a_i^{\mathtt{k}}}\right] = \frac{P_{it}/\hat{P}_t}{P_{i,t+1}/\hat{P}_{t+1}} = 1, \quad \text{se } k_{i,t+1} > 0$$

para $i \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{G}$. Similarmente, no equilíbrio estacionário $z_{\cdot \mathtt{g}t+1} = z_{\cdot \mathtt{g}t}$ e, portanto, a condição (48) define $\bar{R}^{\mathtt{g}}_{i,t+1} = [1/\beta - (1-\delta)]\, P^{\mathtt{g}}_{i,t+1} a_i^{\mathtt{gk}}$ para cada $i \in \mathcal{G}$ e cada $t+1 \in \mathbb{N}$ tais que $k_{i,t+1} > 0$, pois

$$\beta \left[1 - \delta + \frac{\hat{R}^{\mathtt{g}}_{i,t+1}}{P^{\mathtt{g}}_{i,t+1} a_i^{\mathtt{gk}}}\right] = \beta \frac{\partial G/\partial z_{i,t+1}}{\partial G/\partial z_{it}} \left[1 - \delta + \frac{\hat{R}^{\mathtt{g}}_{i,t+1}}{P^{\mathtt{g}}_{i,t+1} a_i^{\mathtt{gk}}}\right] = \frac{P_{it}/\hat{P}^{\mathtt{g}}_t}{P_{i,t+1}/\hat{P}^{\mathtt{g}}_{t+1}} = 1, \quad \text{se } k^{\mathtt{g}}_{i,t+1} > 0$$

para $i \in \mathcal{G}$.

Suponha adicionalmente que exista somente um tipo de trabalho. Ou seja, suponha que $s = 1$. Usando a homogeneidade de grau zero do sistema definido por (59), (60), (61) e (62), o preço W_{1t} pode ser normalizado para a unidade. Considere o seguinte algoritmo construído a partir dessas condições e que generaliza o algoritmo 1 de maneira direta.

Algoritmo 2 (Equilíbrio Competitivo Estacionário com governo)**.** *Normalizando $W_{1t} = W_{1\infty} = 1$ para cada $t \in \mathbb{N}$, proceda de acordo com os passos a seguir:*

(i) *calcule $\tilde{W}_{\cdot\infty}$ como a solução $\tilde{W}_{jt}$ em (19) quando $W_{1jt} = \bar{W}_{1\infty}$.*

(ii) *defina $a = 0$ e escolha um palpite inicial $(P_{\cdot\infty})^0 \in \mathbb{R}^b_{++}$ para $P_{\cdot t} = P_{\cdot\infty}$ para todo t.*

(iii) *para cada $j \in \mathcal{B}$, defina $(p_{j\infty})^a = (1 - \tau_{j\infty})(P_{j\infty})^a$ e $(p_{ij\infty})^a = (1 - \phi_{ij\infty})(P_{i\infty})^a$*

(iv) *usando $(R_{\cdot\infty})^a \equiv [1/\beta - (1-\delta)]\,(P_{\cdot\infty})^a a_i^{\mathtt{k}}$ para cada $j \in \mathcal{B}\backslash\mathcal{G}$ e $(R_{\cdot\infty})^a \equiv [1/\beta - (1-\delta)]\,(P_{\cdot\infty})^a a_i^{\mathtt{gk}}$, para cada $j \in \mathcal{G}$, calcule $(\tilde{R}_{j\infty})^a$ como a solução $\tilde{R}_{jt}$ em (18) quando $R_{ijt} = (R_{i\infty})^a$.*

(v) *calcule $(\tilde{Q}_{\cdot\infty})^a$ como a solução $\tilde{Q}_{jt}$ em (23) quando $\tilde{R}_j = (\tilde{R}_{j\infty})^a$ e $\tilde{W}_j = \tilde{W}_{\cdot\infty}$.*

(vi) *para cada $j \in \mathcal{B}$, calcule $(\tilde{p}_{j\infty})^a$ como a solução $\tilde{p}_j$ em (52) quando $p_j = (p_{\cdot j\infty})^a$*

(vii) *para cada $j \in \mathcal{B}$, calcule $(p_{j\infty})^{a+1}$ como a solução $\tilde{c}_j$ em (56), quando $\tilde{Q}_j = (\tilde{Q}_{j\infty})^a$ e $\tilde{p}_j = (\tilde{p}_{j\infty})^a$*

(viii) *se $\left\|(p_{\cdot\infty})^{a+1} - (p_{\cdot\infty})^a\right\| \approx 0$, prossiga para o passo (ix). Caso contrário, incremente a em uma unidade e retorne ao passo (iii).*

(ix) *usando $P_{\cdot\infty} \equiv \lim_{p\to\infty}(P_{\cdot\infty})^p$, calcule $p_{j\infty} = (1 - \tau_{j\infty})P_{j\infty}$ e $p_{ij\infty} = (1 - \phi_{ij\infty})P_{i\infty}$ para cada i e cada j*

(x) *calcule $\tilde{p}_{\cdot\infty}$ como a solução $\tilde{p}_j$ em (52) quando $p_{\cdot jt} = p_{\cdot j\infty}$.*

(xi) *usando $P_{\cdot\infty}$, calcule*

- $\hat{P}_{\cdot\infty}$ *como a solução* $\hat{P}_j$ *em (28) quando* $P_{\cdot t} = P_{\cdot\infty}$
- $\hat{W}_{\cdot\infty}$ *como a solução* $\hat{W}_j$ *em (29) quando* $\bar{W}_{\cdot t} = \bar{W}_{\cdot\infty}$.
- $\hat{P}^{\mathrm{g}}_{\cdot\infty}$ *como a solução* $\hat{P}^{\mathrm{g}}_j$ *em (49) quando* $P_{\cdot t} = P_{\cdot\infty}$

(xii) calcule $(C_\infty, G_\infty, k_{\cdot\infty}, k^{\mathrm{g}}_{\cdot\infty}, y_{\cdot\infty})$ *como solução do sistema linear com* $2 + m + m^{\mathrm{g}} + b$ *equações construído da seguinte forma:*

- *visto que* $\frac{\partial U/\partial L}{\partial U/\partial C} = \frac{1-\nu}{\nu}\left(\frac{C}{L}\right)^{1-\gamma}$, *a condição (33) define a seguinte equação linear em* (L_∞, C_∞):

$$L_\infty = \left(\frac{\hat{P}_\infty}{\hat{W}_\infty}\frac{1-\nu}{\nu}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} C_\infty \tag{87}$$

Usando esta equação no caso não nulo de (27), obtém-se um sistema com s *equações lineares em* $(C_\infty, h_{\cdot\infty})$ *definido por*

$$h^s_{i\infty} = \bar{l}_i - \left(\frac{\varphi_{il}\hat{W}_\infty/\bar{W}_{i\infty}}{\left(a^l_i\right)^{\gamma_l}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_l}} \left(\frac{\hat{P}_\infty}{\hat{W}_\infty}\frac{1-\nu}{\nu}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} C_\infty, \quad \forall i \in \mathcal{S} \tag{88}$$

- *usando (41) em (39) e (54) em (52),* z_{ij} *pode ser escrito como proporção de* y_j *para cada* $j \in \mathcal{B}$. *Usando esta relação de proporcionalidade entre os vetores* $z_{i\cdot} \in \mathbb{R}^b_+$ *e* $y \in \mathbb{R}^b_+$ *e as condições (26) e (47) na condição de equilíbrio (62), obtém-se um sistema linear em* $(C_\infty, G_\infty, k_{\cdot\infty}, k^{\mathrm{g}}_{\cdot\infty}, y_{\cdot\infty})$ *com* b *equações, após incorporar as leis de movimento do capital* $z_{\cdot\mathrm{k}t}/a_{\cdot\mathrm{k}t} = k_{\cdot t+1} - (1-\delta)k_{\cdot t}$ *e* $z_{\cdot\mathrm{gk}t}/a_{\cdot\mathrm{gk}t} = k^{\mathrm{g}}_{\cdot t+1} - (1-\delta)k^{\mathrm{g}}_{\cdot t}$.
- *usando (54) e (55) em (53),* k_{ij} *pode ser escrito como proporção de* y_j *para cada* $j \in \mathcal{B}\setminus\mathcal{G}$. *Usando esta relação de proporcionalidade entre os vetores* $k_{i\cdot} \in \mathbb{R}^{b-g}_+$ *e* $y \in \mathbb{R}^{b-g}_+$ *na condição de equilíbrio (60), obtém-se um sistema linear em* $(k_{\cdot\infty}, y_{\cdot\infty})$ *com* m *equações.*
- *usando (40) e (41) em (39),* $x_{ij} = k^{\mathrm{g}}_{ij}$ *pode ser escrito como proporção de* y_j *para cada* $j \in \mathcal{G}$. *Usando esta relação de proporcionalidade entre os vetores* $k^{\mathrm{g}}_{i\cdot} \in \mathbb{R}^g_+$ *e* $y \in \mathbb{R}^g_+$ *na condição de equilíbrio (61), obtém-se um sistema linear em* $(k^{\mathrm{g}}_{\cdot\infty}, y_{\cdot\infty})$ *com* m^{g} *equações.*
- *usando (54) e (55) em (53),* h_{ij} *pode ser escrito como proporção de* y_j *para cada* $j \in \mathcal{B}\setminus\mathcal{G}$. *Usando (40) e (41) em (39),* h_{ij} *pode ser escrito como proporção de* y_j *para cada* $j \in \mathcal{G}$. *Usando na condição de equilíbrio (59) a condição de otimalidade (88) e esta relação de proporcionalidade entre os vetores* $h_{i\cdot} \in \mathbb{R}^b_+$ *e* $y \in \mathbb{R}^b_+$, *obtém-se um sistema linear em* $(C_\infty, y_{\cdot\infty})$ *com* s *equações. Somando as equações deste sistema, obtém-se uma equação linear em* $(C_\infty, y_{\cdot\infty})$.
- *usando* $k^{\mathrm{g}}_{i,t+1} = k^{\mathrm{g}}_{it} = k^{\mathrm{g}}_{i\infty}$ *e (58) na condição de otimalidade (46), obtém-se*

$$\hat{P}^{\mathrm{g}} G_\infty + \left\langle a_{\cdot\mathrm{gk}}\delta P_{\cdot\infty} - \bar{R}^g_{\cdot\infty}, k^{\mathrm{g}}_{\cdot\infty}\right\rangle = T_t = \sum_{j\in\mathcal{B}\setminus\mathcal{G}}\left(\tau_{j\infty}P_{j\infty}y_{j\infty} - \sum_{i\in\mathcal{B}}\phi_{ij\infty}P_{i\infty}z_{ij\infty}\right)$$

em que se usou também $G_t = G_\infty$ *e* $P^{\mathrm{g}} = P_{\cdot\infty}$. *Incorporando nesta equação a já discutida* *relação de proporcionalidade entre z_{ijt} e y_{jt}, assim como a convenção $\tau_{j\infty} = \phi_{ij\infty} = 0$ se $j \in \mathcal{G}$, obtém-se uma equação linear em $(G_\infty, k^{\mathtt{g}}_{\cdot\infty}, y_{\cdot\infty})$.*

C Calibração

A tabela 3 apresenta de maneira bastante conveniente o funcionamento da economia com a presença do governo. A linha da tabela 3 correspondente ao lucro de cada empresa/setor é nula em equilíbrio, pois $\pi_j = 0$ para cada $j \in \mathcal{B}$, conforme discutido no lema 7. Ainda, a tributação do setor $j \in \mathcal{B}$ é dada por $t_j = \tau_j P_j y_j - \sum_{i\in\mathcal{B}} \phi_{ij} P_i z_{ij}$, enquanto a tributação do consumo e do investimento foram assumidas como nulas $t_{\mathtt{c}} = t_{\mathtt{k}} = 0$. As quantidades de trabalho h_{ij}, de capital k_{ij} e insumos z_{ij} são proporcionais ao nível de produção y_j, conforme estabelecido no lema 7. A quantidade de consumo privado $z_{i\mathtt{c}t}$ é proporcional ao índice de consumo privado C_t, conforme (26), e a quantidade de consumo público $z_{i\mathtt{g}t}$ é proporcional ao índice de consumo público G_t, conforme (47). Os preços de equilíbrio são determinados pela condição (57). Por fim, em estado estacionário, os níveis de investimento privado $z_{i\mathtt{k}}$ e público $z_{i\mathtt{gk}}$ são dados por $\delta k_i a_i^{\mathtt{k}}$ e $\delta k_i^g a_i^{\mathtt{gk}}$, respectivamente.

O resultado estabelecido no lema 9, por sua vez, permite renormalizar as quantidades apresentadas na tabela 3 de forma que os preços de equilíbrio sejam todos unitários. Concretamente, as constantes de normalização $\left(a_{ij}^z, a_{ij}^k, a_{ij}^h\right)$, $\left(a_i^c, a_i^l, a_i^{\mathtt{k}}\right)$ e $\left(a_i^{\mathtt{g}}, a_i^{\mathtt{gk}}\right)$ são escolhidas para que para cada $t \in \mathbb{N}$ o vetor de preços $\{Q_t\} = \{(P_t, R_t, W_t)\}$ seja tal que $P_{jt} = R_{it} = W_{nt} = 1$ para cada $(i, j, n) \in \mathcal{B}^2 \times \mathcal{S}$. Sob tal normalização, os fluxos apresentados na tabela 3 podem ser interpretados como quantidades reais.

Como ilustração dessa observação, considere o fluxo $P_2 z_{21}$ de vendas do setor $i = 2$ para o setor $j = 1$. Trata-se da receita nominal que o setor $i = 2$ aufere ao vender z_{21} unidades de bem $i = 2$ para o setor $j = 1$ utilizar como insumo em sua linha de produção. Simetricamente, $P_2 z_{21}$ é a despesa (custo) nominal incorrida pelo setor $j = 1$ ao comprar z_{21} unidades de bem $i = 2$ do setor $i = 2$. Assumindo $P_2 = 1$, este fluxo de receita/despesa nominal coincide com o fluxo de quantidade real entre estes dois setores. Similarmente, o produto nominal do setor $i = 2$ é dado por $Y_2 = \sum_{j\in\mathcal{B}} P_2 z_{2j} + P_2 z_{2\mathtt{c}} + P_2 z_{2\mathtt{k}} + P_2 z_{2\mathtt{g}} + P_2 z_{2\mathtt{gk}}$. Usando a normalização $P_2 = 1$ e a condição de equilíbrio (62) para $i = 2$, obtém-se que o produto nominal Y_2 coincide com o produto real y_2, pois $Y_2 = \sum_{j\in\mathcal{B}} z_{2j} + z_{2\mathtt{c}} + z_{2\mathtt{k}} + z_{2\mathtt{g}} + z_{2\mathtt{gk}} = y_2$.

Agora, procedendo com o mapeamento entre a tabela 3 com as condições de equilíbrio, é possível inferir valores para os parâmetros. Por exemplo, o fluxo tributação

$$t_j/y_j = \tau_j P_j - \sum_{i\in\mathcal{B}} \phi_{ij} P_i z_{ij}/y_j = \tau_j - \sum_{i\in\mathcal{B}} \phi_{ij} z_{ij}/y_j \tag{89}$$

define uma equação para cada $j \in \mathcal{B}$, em que as razões t_j/y_j e z_{ij}/y_j são disponibilizadas na tabela 3. O sistema de b equações assim definido permite escrever $\{\tau_j\}_{j\in\mathcal{B}}$ em função de $(\{\phi_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}})_{j\in\mathcal{B}}$. Concretamente, $\tau_j = \sum_{i\in\mathcal{B}} \phi_{ij} z_{ij}/y_j + t_j/y_j$.

Hipótese 5. *Não há crédito tributário na alocação de equilíbrio inicial. Ou seja, $\phi_{ij} = 0$ para cada $(i, j) \in \mathcal{B}^2$.*

A hipótese 5 simplifica a estratégia de calibração em um contexto de indisponibilidade de dados sobre o montante $\phi_{ij} z_{ij}$ de crédito tributário obtido com a compra de cada insumo $i \in \mathcal{B}$. Como existem alguns setores que de fato recebem crédito tributário sobre a compra de insumos, a hipótese 5 subestima o atual emprego de impostos sobre valor adicionado na economia brasileira. Neste sentido, o efeito de uma reforma tributária que substitui toda a tributação sobre receita por tributação sobre valor adicionado é necessariamente superestimado sob a hipótese 5.

Prosseguindo com o mapeamento entre os dados da tabela 3 e os parâmetros do modelo, a razão z_{ij}/z_{nj} proporciona outra fonte de disciplina empírica para os parâmetros. Explorando as condições de otimalidade apresentadas no lema 7, obtém-se

$$\frac{z_{ij}}{z_{nj}} = \frac{\left(\alpha_{ij}\tilde{p}_j/p_{ij}\left(A_j^Z a_{ij}^z\right)^{\zeta_j}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}}}{\left(\alpha_{nj}\tilde{p}_j/p_{nj}\left(A_j^Z a_{nj}^z\right)^{\zeta_j}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}}} = \left(\frac{\alpha_{ij}/(1-\phi_{ij})}{\alpha_{nj}/(1-\phi_{nj})}\left(\frac{a_{nj}^z}{a_{ij}^z}\right)^{\zeta_j}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}}, \text{ se } z_{nj} > 0 \tag{90}$$

$$\alpha_{nj} = 0 \quad \text{se } z_{nj} = 0 \tag{91}$$

O lado esquerdo da equação (90) está disponível na tabela 3 e seu o lado direito é claramente definido de forma completa pelos parâmetros $(\alpha_{ij}, \alpha_{nj}, \phi_{ij}, \phi_{nj}, a_{ij}^z, a_{nj}^z, \zeta_j)$. Como o sistema (90–91) é definido para cada $(i,n) \in \mathcal{B}^2$ e cada $j \in \mathcal{B}$, ao fixar n em (90–91) com $z_{nj} > 0$, obtém-se um sistema com $(b-1)$ equações para cada $j \in \mathcal{B}$. Usando que $\sum_{i\in\mathcal{B}} \alpha_{ij} = 1$ para cada $j \in \mathcal{B}$, obtém-se um sistema com b^2 equações lineares em $(\{\alpha_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}})_{j\in\mathcal{B}}$ que pode ser resolvido para escrever $(\{\alpha_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}})_{j\in\mathcal{B}}$ como função de $(\{\phi_{ij}, a_{ij}^z\}_{i\in\mathcal{B}}, \zeta_j)_{j\in\mathcal{B}}$. Usando análise similar, as condições de otimalidade apresentadas no lema 7 geram

$$\frac{k_{ij}}{k_{nj}} = \frac{\left(\kappa_{ij}\tilde{R}_j/R_{ij}\left(A_j^K a_{ij}^k\right)^{\lambda_{kj}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}}}{\left(\kappa_{nj}\tilde{R}_j/R_{nj}\left(A_j^K a_{nj}^k\right)^{\lambda_{kj}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}}} = \left(\frac{\kappa_{ij}}{\kappa_{nj}}\left(\frac{a_{ij}^k}{a_{nj}^k}\right)^{\lambda_{kj}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}}, \text{ se } k_{nj} > 0 \tag{92}$$

$$\kappa_{nj} = 0 \quad \text{se } k_{nj} = 0 \tag{93}$$

O lado esquerdo da equação (92) está disponível na tabela 3 e seu o lado direito é completamente definido pelos parâmetros $(\kappa_{ij}, \kappa_{nj}, a_{ij}^k, a_{nj}^k, \lambda_{kj})$. Como o sistema (92–93) é definido para cada $(i,n) \in \mathcal{B}^2$ e cada $j \in \mathcal{B}$, ao fixar n em (92–93) com $k_{nj} > 0$, obtém-se um sistema com $(b-1)$ equações para cada $j \in \mathcal{B}$. Usando que $\sum_{i\in\mathcal{B}} \kappa_{ij} = 1$ para cada $j \in \mathcal{B}$, obtém-se um sistema com b^2 equações lineares em $(\{\kappa_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}})_{j\in\mathcal{B}}$ que pode ser resolvido para escrever $(\{\kappa_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}})_{j\in\mathcal{B}}$ como função de $(\{a_{ij}^h\}_{i\in\mathcal{B}}, \lambda_{kj})_{j\in\mathcal{B}}$. Por fim, as condições de otimalidade apresentadas no lema 7 também geram

$$\frac{h_{ij}}{h_{nj}} = \frac{\left(\omega_{ij}\tilde{W}_j/W_{ij}\left(A_j^H a_{ij}^h\right)^{\lambda_{hj}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}}}{\left(\omega_{nj}\tilde{W}_j/W_{nj}\left(A_j^H a_{nj}^h\right)^{\lambda_{hj}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}}} = \left(\frac{\omega_{ij}}{\omega_{nj}}\left(\frac{a_{ij}^h}{a_{nj}^h}\right)^{\lambda_{hj}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}}, \text{ se } h_{nj} > 0 \tag{94}$$

$$\omega_{nj} = 0 \quad \text{se } h_{nj} = 0 \tag{95}$$

O lado esquerdo da equação (94) está disponível na tabela 3 e seu o lado direito é completamente definido pelos parâmetros $(\omega_{ij}, \omega_{nj}, a_{ij}^h, a_{nj}^h, \lambda_{hj})$. Como o sistema (94–95) é definido para cada $(i,n) \in \mathcal{S}^2$ e cada $j \in \mathcal{B}$, ao fixar n em (94–95) com $h_{nj} > 0$, obtém-se um sistema com $(s-1)$ equações para cada $j \in \mathcal{B}$. Usando que $\sum_{i\in\mathcal{B}} \omega_{ij} = 1$ para cada $j \in \mathcal{B}$, obtém-se um sistema com sb equações lineares em

$(\{\omega_{nj}\}_{n\in\mathcal{S}})_{j\in\mathcal{B}}$ que pode ser resolvido para escrever $(\{\omega_{nj}\}_{n\in\mathcal{S}})_{j\in\mathcal{B}}$ como função de $(\{a^h_{nj}\}_{n\in\mathcal{S}}, \lambda_{hj})_{j\in\mathcal{B}}$.

Até aqui, os parâmetros em $(\tau_j, \{\alpha_{ij}, \kappa_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}}, \{\omega_{nj}\}_{n\in\mathcal{S}})_{j\in\mathcal{B}}$ foram escritos como um função dos vetores de parâmetros $(\{\phi_{ij}, a^z_{ij}, a^k_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}}, \{a^h_{nj}\}_{n\in\mathcal{S}}, \zeta_j, \lambda_{kj}, \lambda_{hj})_{j\in\mathcal{B}}$, definida como solução de um sistema de $b+3b^2$ equações lineares.

O fluxo intersetorial apresentado na tabela 3 também é fonte de outras justificativas empíricas para os valores do parâmetros do modelo. A razão z_{ij}/y_j pode ser obtida dividindo $P_i z_{ij} = z_{ij}$ por $Y_j = y_j$. Usando as condições de otimalidade apresentadas no lema 7, sabe-se que esta razão assume no modelo o valor de equilíbrio

$$\frac{z_{ij}}{y_j} = \left(\frac{\alpha_{ij}\tilde{p}_j/p_{ij}}{\left(A^Z_j a^z_{ij}\right)^{\zeta_j}}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}} \frac{Z_j(z_{\cdot j})}{y_j} = \left(\frac{\alpha_{ij}\tilde{p}_j/A^Z_j}{(1-\phi_{ij})\left(a^z_{ij}\right)^{\zeta_j}}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}} \left(\frac{\eta_j\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{p}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} A^Z_j, \tag{96}$$

em que se usou a hipótese de que $p_{ij} = (1-\phi_{ij})P_i = (1-\phi_{ij})$. Para ver que há somente parâmetros no lado direito dessa equação, note que a condição de equilíbrio $\tilde{c}_j(\cdot,\cdot) = p_j$ apresentada em (57) gera $\tilde{c}_j = p_j = (1-\tau_j)P_j = (1-\tau_j)$ e a utilização da normalização $P_{nt} = 1$ na função $\tilde{p}_j(\cdot)$ gera

$$\frac{\tilde{p}_j}{A^Z_j} = \left(\sum_{n\in\mathcal{B}}\left(\frac{\alpha_{nj}}{\left(a^z_{nj}p_{nj}\right)^{\zeta_j}}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}}\right)^{\frac{\zeta_j-1}{\zeta_j}} = \left(\sum_{n\in\mathcal{B}}\left(\frac{\alpha_{nj}}{\left(a^z_{nj}(1-\phi_{nj})\right)^{\zeta_j}}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}}\right)^{\frac{\zeta_j-1}{\zeta_j}}. \tag{97}$$

Assim, $\tilde{p}_j$ é completamente determinado pelos seguintes vetores de parâmetros: constantes de normalização para insumos $\{a^z_{nj}\}_{(n,j)\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}}$, coeficientes de participação para insumos $\{\alpha_{nj}\}_{n\in\mathcal{B}}$, parâmetro elasticidade substituição entre insumos ζ_j, a estrutura de crédito tributário $\{\phi_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}}$ e a constante de normalização do índice de insumo A^Z_j. Este fato mostra que a equação (96) apresenta do seu lado direito completamente determinado pelo vetor de parâmetros $\left(\{a^z_{nj}\}_{(n,j)\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}}, \{\alpha_{nj}\}_{n\in\mathcal{B}}, \zeta_j, \{\phi_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}}, A^Z_j\right)$, pela constante de normalização do nível de produção A_j, pelo coeficiente de partição do índice de insumo η_j, pelo parâmetro de elasticidade substituição entre insumo e fatores σ_j e a alíquota τ_j. Como a equação (96) é definida para cada $(i,j)\in\mathcal{B}^2$, (96) define um sistema de b^2 equações cujo vetor de variáveis é o vetor de parâmetros $(A^Z_j, A_j, \eta_j, \{a^z_{ij}\}_{(i,j)\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}}, \{\alpha_{ij}\}_{n\in\mathcal{B}}, \zeta_j, \sigma_j, \tau_j, \{\phi_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}})_{j\in\mathcal{B}}$. Este sistema pode, a princípio, ser usado para escrever $\{a^z_{ij}\}_{(i,j)\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}}$ em função das demais variáveis.

Análises similares podem ser feitas para outros fluxos da tabela 3. Concretamente, os fluxos de fatores $R_{ij}k_{ij}/y_j = k_{ij}/y_j$ e $W_{ij}h_{ij}/y_j = h_{ij}/y_j$ também são disponibilizados na tabela 3 e, pelas condições de otimalidade apresentadas no lema 7, sabe-se que estas razões assumem no modelo os respectivos valores de equilíbrio

$$\begin{aligned}\frac{k_{ij}}{y_j} &= \left(\frac{\kappa_{ij}\tilde{R}_j/R_{ij}}{\left(A^K_j a^k_{ij}\right)^{\lambda_{kj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}} \frac{K_j(\cdot)}{y_j} = \left(\frac{\kappa_{ij}\tilde{R}_j}{\left(A^K_j a^k_{ij}\right)^{\lambda_{kj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}} \left(\frac{\theta_j\tilde{Q}_j}{(A^F_j)^{\rho_j}\tilde{R}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} \frac{F_j(\cdot)}{y_j} \\ &= \left(\frac{\kappa_{ij}\tilde{R}_j/A^K_j}{\left(a^k_{ij}\right)^{\lambda_{kj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}} \left(\frac{\theta_j\tilde{Q}_j/A^F_j}{\tilde{R}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} \left(\frac{(1-\eta_j)\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{Q}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} A^K_j A^F_j\end{aligned} \tag{98}$$

e

$$\frac{h_{ij}}{y_j} = \left(\frac{\omega_{ij}\tilde{W}_j/W_{ij}}{(A_j^H a_{ij}^h)^{\lambda_{hj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}} \frac{H_j(\cdot)}{y_j} = \left(\frac{\omega_{ij}\tilde{W}_j}{(A_j^H a_{ij}^h)^{\lambda_{hj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}} \left(\frac{(1-\theta_j)\tilde{Q}_j}{(A_j^F)^{\rho_j}\tilde{W}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} \frac{F_j(\cdot)}{y_j}$$

$$= \left(\frac{\omega_{ij}\tilde{W}_j/A_j^H}{(a_{ij}^h)^{\lambda_{hj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}} \left(\frac{(1-\theta_j)\tilde{Q}_j/A_j^F}{\tilde{W}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} \left(\frac{(1-\eta_j)\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{Q}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} A_j^H A_j^F. \tag{99}$$

Para ver que há somente parâmetros no lado direito dessas equações, note que a condição de equilíbrio $\tilde{c}_j(\cdot,\cdot) = p_j$ apresentada em (57) novamente gera $\tilde{c}_j = p_j = (1-\tau_j)P_j = (1-\tau_j)$ e a utilização da normalização $R_{it} = W_{nt} = 1$ nas funções $\tilde{R}_j(\cdot)$ e $\tilde{W}_j(\cdot)$ gera

$$\frac{\tilde{R}_j}{A_j^K} = \left(\sum_{n\in\mathcal{B}}\left(\frac{\kappa_{nj}}{(a_{nj}^k R_{nj})^{\lambda_{kj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}}\right)^{\frac{\lambda_{kj}-1}{\lambda_{kj}}} = \left(\sum_{n\in\mathcal{B}}\left(\frac{\kappa_{nj}}{(a_{nj}^k)^{\lambda_{kj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}}\right)^{\frac{\lambda_{kj}-1}{\lambda_{kj}}} \tag{100}$$

$$\frac{\tilde{W}_j}{A_j^H} = \left(\sum_{n\in\mathcal{S}}\left(\frac{\omega_{nj}}{(a_{nj}^h W_{nj})^{\lambda_{hj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}}\right)^{\frac{\lambda_{hj}-1}{\lambda_{hj}}} = \left(\sum_{n\in\mathcal{S}}\left(\frac{\omega_{nj}}{(a_{nj}^h)^{\lambda_{hj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}}\right)^{\frac{\lambda_{hj}-1}{\lambda_{hj}}} \tag{101}$$

de forma que $\tilde{Q}_j = \left(\left(\theta_j/\tilde{R}_j^{\rho_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} + \left((1-\theta_j)/\tilde{W}_j^{\rho_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}\right)^{\frac{\rho_j-1}{\rho_j}} A_j^F$ também depende somente de parâmetros. Como consequência, os lados direito das equações (98) e (99) são completamente determinados pelo vetor de constantes de normalização $(\{a_{ij}^k\}_{i\in\mathcal{B}}, \{a_{ij}^h\}_{i\in\mathcal{S}})$ e pelo vetor de parâmetros $(A_j^H, A_j^K, A_j^F, A_j, \theta_j, \eta_j, \{\kappa_{ij}\}$ Como a equação (98) é definida para cada $(i,j) \in \mathcal{B}^2$ e a equação (99) é definida para cada $(i,j) \in \mathcal{S}\times\mathcal{B}$, (98) e (99) definem um sistema de $b^2 + bs$ equações, cujo vetor de variáveis é o vetor de parâmetros $(\{a_{ij}^k\}_{i\in\mathcal{B}}, \{a_{nj}^h\}_{n\in\mathcal{S}}, A_j^H, A_j^K, A_j^F, A_j, \theta_j, \eta_j, \{\kappa_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}}, \{\omega_{nj}\}_{n\in\mathcal{S}}, \lambda_{kj}, \lambda_{hj}, \rho_j, \sigma_j, \tau_j)_{j\in\mathcal{B}}$. Este sistema pode, a princípio, ser resolvido para escrever o vetor $(\{a_{ij}^k\}_{i\in\mathcal{B}}, \{a_{ij}^h\}_{i\in\mathcal{S}})_{j\in\mathcal{B}}$ como uma função de $(A_j^H, A_j^K, A_j^F, A_j, \theta_j, \eta_j$

Com base no exposto até aqui, dados palpites para os vetores $(A_j^H, A_j^K, A_j^F, A_j^Z, A_j)_{j\in\mathcal{B}}$, $(\theta_j, \eta_j, \lambda_{kj}, \lambda_{hj}, \zeta_j, \rho_j,$ e $(\{a_{ij}^z, a_{ij}^k\}_{i\in\mathcal{B}}, \{a_{nj}^h\}_{n\in\mathcal{S}})_{j\in\mathcal{B}}$, pode-se obter um palpite para o vetor $(\tau_j, \{\alpha_{ij}, \kappa_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}}, \{\omega_{nj}\}_{n\in\mathcal{S}})_{j\in\mathcal{B}}$ como a solução de um sistema de $b + 3b^2$ equações lineares e, a princípio, obter um novo palpite para $(\{a_{ij}^z, a_{ij}^k\}_{i\in\mathcal{B}}, \{a_{nj}^h\}_{n\in\mathcal{S}})_{j\in\mathcal{B}}$ resolvendo-se um sistema de $2b^2+sb$ equações não lineares. Após repetição iterativa desse procedimento, eventual convergência dos palpites obtidos para $(\{a_{ij}^z, a_{ij}^k\}_{i\in\mathcal{B}}, \{a_{nj}^h\}_{n\in\mathcal{S}})_{j\in\mathcal{B}}$ define os parâmetros $(\tau_j, \{\alpha_{ij}, \kappa_{ij}, a_{ij}^z, a_{ij}^k\}_{i\in\mathcal{B}}, \{\omega_{nj}, a_{nj}^h\}_{n\in\mathcal{S}})_{j\in\mathcal{B}}$ como uma função dos vetores $(A_j^H, A_j^K, A_j^F, A_j^Z,$ e $(\theta_j, \eta_j, \lambda_{kj}, \lambda_{hj}, \zeta_j, \rho_j, \sigma_j, \{\phi_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}})_{j\in\mathcal{B}}$.

Retomando o mapeamento entre dados e parâmetros, observe que somando (98) em $i \in \mathcal{B}$ e (99) em $i \in \mathcal{S}$

$$\frac{\tilde{K}_j}{y_j A_j^F} = \frac{\sum_{i\in\mathcal{B}} k_{ij}}{y_j A_j^F} = \tilde{R}_j\left(\frac{\theta_j\tilde{Q}_j/A_j^F}{\tilde{R}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}\left(\frac{(1-\eta_j)\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{Q}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}}$$

$$= \left(\frac{\theta_j\tilde{Q}_j/A_j^F}{(\tilde{R}_j)^{\rho_j}}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}\left(\frac{(1-\eta_j)\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{Q}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} \tag{102}$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\tilde{H}_j}{y_j A_j^F} = \frac{\sum_{i\in\mathcal{S}} h_{ij}}{y_j A_j^F} &= \tilde{W}_j \left(\frac{(1-\theta_j)\tilde{Q}_j/A_j^F}{\tilde{W}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} \left(\frac{(1-\eta_j)\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{Q}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} \\
&= \left(\frac{(1-\theta_j)\tilde{Q}_j/A_j^F}{(\tilde{W}_j)^{\rho_j}}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} \left(\frac{(1-\eta_j)\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{Q}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} \qquad (103)
\end{aligned}
$$

em que se denotou $\tilde{K}_j \equiv \sum_{i\in\mathcal{B}} k_{ij}$ e $\tilde{H}_j \equiv \sum_{i\in\mathcal{S}} h_{ij}$. As quantidades $\tilde{K}_j$ e $\tilde{H}_j$ podem ser calculadas a partir da tabela 3 e a sua razão pode ser obtida dividindo-se as equações (102) e (103) como dada por

$$
\frac{\tilde{K}_j}{\tilde{H}_j} = \frac{\left(\theta_j\tilde{Q}_j/A_j^F(\tilde{R}_j)^{\rho_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}}{\left((1-\theta_j)\tilde{Q}_j/A_j^F(\tilde{W}_j)^{\rho_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}} = \left(\frac{\theta_j}{1-\theta_j}\left(\frac{\tilde{W}_j}{\tilde{R}_j}\right)^{\rho_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}. \qquad (104)
$$

Assim, θ_j pode ser trivialmente escrito como uma função de ρ_j, $\tilde{R}_j$, $\tilde{W}_j$ e $\tilde{K}_j/\tilde{H}_j$. Usando (100) e (101), observe que $\tilde{R}_j$ e $\tilde{W}_j$ são completamente determinados por $(\{a_{ij}^k\}_{i\in\mathcal{B}}, \{a_{ij}^h\}_{i\in\mathcal{S}})$ e pelo vetor $(A_j^H, A_j^K, \{\kappa_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}}, \{\omega_{nj}\}_{n\in\mathcal{S}}, \lambda_{kj}, \lambda_{hj})_{j\in\mathcal{B}}$. Como consequência, $\{\theta_j\}_{j\in\mathcal{B}}$ pode ser escrito como uma função de $(\rho_j, A_j^H, A_j^K, \{\kappa_{ij}, a_{ij}^k\}_{i\in\mathcal{B}}, \{\omega_{nj}, a_{nj}^h\}_{n\in\mathcal{S}}, \lambda_{kj}, \lambda_{hj})_{j\in\mathcal{B}}$.

Agora, observe que multiplicando (96) por $(1-\phi_{ij})$, somando em $i\in\mathcal{B}$ as equações resultantes e usando (97), obtém-se uma equação em $(A_j^Z, A_j, \eta_j, \{\alpha_{ij}\}_{n\in\mathcal{B}}, \zeta_j, \sigma_j, \tau_j, \{\phi_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}})_{j\in\mathcal{B}}$ para cada $j\in\mathcal{B}$.

$$
\frac{\tilde{Z}_j}{y_j} - \sum_{i\in\mathcal{B}} \frac{z_{ij}}{y_j}\phi_{ij} = \sum_{i\in\mathcal{B}} \frac{z_{ij}}{y_j}(1-\phi_{ij}) = \left(\frac{\eta_j\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{p}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} \tilde{p}_j = \left(\frac{\eta_j\tilde{c}_j}{(A_j\tilde{p}_j)^{\sigma_j}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}}, \qquad (105)
$$

em que se denotou $\tilde{Z}_j \equiv \sum_{i\in\mathcal{B}} z_{ij}$. A quantidade $\tilde{Z}_j$ pode ser calculadas a partir da tabela 3. Denotando $\tilde{F}_j \equiv \tilde{K}_j + \tilde{H}_j$, a soma das equações (102) e (103) gera

$$
\frac{\tilde{F}_j}{y_j} = \frac{\tilde{K}_j + \tilde{H}_j}{y_j} = \tilde{Q}_j \left(\frac{(1-\eta_j)\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{Q}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} = \left(\frac{(1-\eta_j)\tilde{c}_j}{(A_j\tilde{Q}_j)^{\sigma_j}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} \qquad (106)
$$

Dividindo essas duas últimas equações, obtém-se

$$
\frac{\tilde{Z}_j}{\tilde{F}_j} = \left(\frac{\frac{\eta_j\tilde{c}_j}{(A_j\tilde{p}_j)^{\sigma_j}}}{\frac{(1-\eta_j)\tilde{c}_j}{(A_j\tilde{Q}_j)^{\sigma_j}}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} + \frac{y_j}{\tilde{F}_j}\sum_{i\in\mathcal{B}} \frac{z_{ij}}{y_j}\phi_{ij} = \left(\frac{\eta_j}{1-\eta_j}\left(\frac{\tilde{Q}_j}{\tilde{p}_j}\right)^{\sigma_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} + \sum_{i\in\mathcal{B}} \frac{z_{ij}}{\tilde{F}_j}\phi_{ij} \qquad (107)
$$

Assim, η_j pode ser trivialmente escrito como uma função de σ_j, $\{\phi_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}}$, $\tilde{Q}_j$, $\tilde{p}_j$ e $\tilde{Z}_j/\tilde{F}_j$. Por definição, $\tilde{Q}_j$ é determinado completamente por (θ_j, ρ_j), $\tilde{R}_j$ e $\tilde{W}_j$. Usando este fato juntamente com (97), (100) e (101), $\{\eta_j\}_{j\in\mathcal{B}}$ pode ser escrito como uma função de $\{\phi_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}}$ e $(\rho_j, \sigma_j, A_j^H, A_j^K, A_j^Z, \{\kappa_{ij}, a_{ij}^k\}_{i\in\mathcal{B}}, \{\omega_{nj}, a_{nj}^h\}_{n\in\mathcal{S}}, \{$

Com base no exposto até aqui, dados palpites para os vetores $(A_j^H, A_j^K, A_j^F, A_j^Z, A_j)_{j\in\mathcal{B}}$, $(\theta_j, \eta_j, \lambda_{kj}, \lambda_{hj}, \zeta_j, \rho_j,$ e $(\{a_{ij}^z, a_{ij}^k\}_{i\in\mathcal{B}}, \{a_{nj}^h\}_{n\in\mathcal{S}})_{j\in\mathcal{B}}$, pode-se obter (i) um palpite para o vetor $(\tau_j, \{\alpha_{ij}, \kappa_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}}, \{\omega_{nj}\}_{n\in\mathcal{S}})_{j\in\mathcal{B}}$ como a solução de o sistema de $b+3b^2$ equações lineares definido por (89), (90) e (91), o qual é usado para obter (ii) um novo palpite para $\{\theta_j, \eta_j\}_{j\in\mathcal{B}}$ resolvendo-se o sistema de $2b$ equações definido por (104) e (107) e, a princípio, (iii) um novo palpite para $(\{a^z_{ij}, a^k_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}}, \{a^h_{nj}\}_{n\in\mathcal{S}})_{j\in\mathcal{B}}$ resolvendo-se o sistema de $2b^2+sb$ equações não lineares definido por (96), (98) e (99). Após repetição iterativa desse procedimento, eventual convergência dos palpites obtidos para $(\theta_j, \eta_j, \{a^z_{ij}, a^k_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}}, \{a^h_{nj}\}_{n\in\mathcal{S}})_{j\in\mathcal{B}}$ define os parâmetros $(\tau_j, \theta_j, \eta_j, \{\alpha_{ij}, \kappa_{ij}, a^z_{ij}, a^k_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}}, \{\omega_{nj}, a^h_{nj}\}_{n\in\mathcal{S}})_{j\in\mathcal{B}}$ como uma função dos vetores $(A^H_j, A^K_j, A^F_j, A^Z_j, A_j)_{j\in\mathcal{B}}$ e $(\lambda_{kj}, \lambda_{hj}, \zeta_j, \rho_j, \sigma_j, \{\phi_{ij}\}_{i\in\mathcal{B}})_{j\in\mathcal{B}}$.

Lemma 10. *Considere que a agenda de crédito tributário é dada por* $\{\phi_{ij}\}_{(i,j)\in B^2}$. *Suponha que*

$$\theta_j = \frac{\sum_{n\in B} k_{nj}}{\sum_{n\in B} k_{nj} + \sum_{m\in S} h_{mj}}, \qquad \eta_j = \frac{\sum_{n\in B} z_{nj}(1-\phi_{nj})}{\sum_{n\in B} k_{nj} + \sum_{m\in S} h_{mj} + \sum_{l\in B} z_{lj}(1-\phi_{lj})} \tag{108}$$

$$\alpha_{ij} = \frac{z_{ij}(1-\phi_{ij})}{\sum_{n\in B} z_{nj}(1-\phi_{nj})}, \qquad \kappa_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sum_{n\in B} k_{nj}}, \qquad \omega_{ij} = \frac{h_{ij}}{\sum_{n\in S} h_{nj}} \tag{109}$$

$$A_j A^Z_j a^z_{ij} = \frac{z_{ij}}{y_j}, \qquad A_j A^F_j A^K_j a^k_{ij} = \frac{k_{ij}}{y_j}, \qquad A_j A^F_j A^H_j a^h_{ij} = \frac{h_{ij}}{y_j} \tag{110}$$

$$e \qquad \tau_j = \sum_{i\in\mathcal{B}} \phi_{ij} z_{ij}/y_j - t_j/y_j. \tag{111}$$

Então, são satisfeitas condições (89), (96), (98), (99), (104), (107) e $\sum_i \alpha_{ij} = \sum_i \kappa_{ij} = \sum_i \omega_{ij} = 1$.

Proof. Note que a condição (89) é trivialmente satisfeita sob (111). Ainda, sob as condições (109) e (110), a equação (100) gera $\tilde{R}_j = \left(\sum_{n\in\mathcal{B}} k_{nj}\right)/A_j A^F_j y_j$, pois

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{R}_j}{A^K_j} &= \left(\sum_{n\in\mathcal{B}} \left(\frac{\kappa_{nj}}{(a^k_{nj})^{\lambda_{kj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}}\right)^{\frac{\lambda_{kj}-1}{\lambda_{kj}}} = \left(\sum_{n\in\mathcal{B}} \left(\frac{k_{nj}}{\sum_{l\in B} k_{lj}} \left(A_j A^F_j A^K_j \frac{y_j}{k_{nj}}\right)^{\lambda_{kj}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}}\right)^{\frac{\lambda_{kj}-1}{\lambda_{kj}}} \\
&= \left(\left(A_j A^F_j A^K_j y_j\right)^{\frac{\lambda_{kj}}{1-\lambda_{kj}}} \sum_{n\in\mathcal{B}} \left(\frac{(k_{nj})^{1-\lambda_{kj}}}{\sum_{l\in B} k_{lj}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}}\right)^{\frac{\lambda_{kj}-1}{\lambda_{kj}}} \\
&= \frac{1}{A_j A^F_j A^K_j y_j} \left(\frac{\sum_{n\in\mathcal{B}} k_{nj}}{\left(\sum_{l\in B} k_{lj}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}}}\right)^{\frac{\lambda_{kj}-1}{\lambda_{kj}}} = \frac{\sum_{n\in\mathcal{B}} k_{nj}}{A_j A^F_j A^K_j y_j},
\end{aligned}$$

a equação (101) gera $\tilde{W}_j = \left(\sum_{n\in\mathcal{B}} h_{nj}\right)/A_j A^F_j y_j$, pois

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{W}_j}{A^H_j} &= \left(\sum_{n\in\mathcal{S}} \left(\frac{\omega_{nj}}{(a^h_{nj})^{\lambda_{hj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}}\right)^{\frac{\lambda_{hj}-1}{\lambda_{hj}}} = \left(\sum_{n\in\mathcal{S}} \left(\frac{h_{nj}}{\sum_{l\in\mathcal{S}} h_{lj}} \left(A_j A^F_j A^H_j \frac{y_j}{h_{nj}}\right)^{\lambda_{hj}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}}\right)^{\frac{\lambda_{hj}-1}{\lambda_{hj}}} \\
&= \left(\left(A_j A^F_j A^H_j y_j\right)^{\frac{\lambda_{hj}}{1-\lambda_{hj}}} \sum_{n\in\mathcal{S}} \left(\frac{(h_{nj})^{1-\lambda_{hj}}}{\sum_{l\in\mathcal{S}} h_{lj}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}}\right)^{\frac{\lambda_{hj}-1}{\lambda_{hj}}} \\
&= \frac{1}{A_j A^F_j A^H_j y_j} \left(\frac{\sum_{n\in\mathcal{S}} h_{nj}}{\left(\sum_{l\in\mathcal{S}} h_{lj}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}}}\right)^{\frac{\lambda_{hj}-1}{\lambda_{hj}}} = \frac{\sum_{n\in\mathcal{S}} h_{nj}}{A_j A^F_j A^H_j y_j},
\end{aligned}$$

Como consequência, sob (108), a equação (23) gera $\tilde{Q}_j = \left(\sum_{n\in B} k_{nj} + \sum_{n\in\mathcal{S}} h_{nj}\right)/A_j y_j$, pois

$$
\begin{aligned}
\frac{\tilde{Q}_j}{A_j^F} &= \left(\left(\frac{\theta_j}{\tilde{R}_j^{\rho_j}}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} + \left(\frac{1-\theta_j}{\tilde{W}_j^{\rho_j}}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}\right)^{\frac{\rho_j-1}{\rho_j}} \\
&= \left(\left(\frac{\left(\frac{A_j A_j^F y_j}{\sum_{n\in\mathcal{B}} k_{nj}}\right)^{\rho_j}\sum_{n\in B} k_{nj}}{\sum_{n\in B} k_{nj} + \sum_{m\in S} h_{mj}}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} + \left(\frac{\left(\frac{A_j A_j^F y_j}{\sum_{n\in\mathcal{S}} h_{nj}}\right)^{\rho_j}\sum_{n\in\mathcal{S}} h_{nj}}{\sum_{n\in B} k_{nj} + \sum_{m\in S} h_{mj}}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}\right)^{\frac{\rho_j-1}{\rho_j}} \\
&= \frac{1}{A_j A_j^F y_j}\left(\frac{\sum_{n\in B} k_{nj} + \sum_{n\in\mathcal{S}} h_{nj}}{\left(\sum_{n\in B} k_{nj} + \sum_{m\in S} h_{mj}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}}\right)^{\frac{\rho_j-1}{\rho_j}} = \frac{\sum_{n\in B} k_{nj} + \sum_{n\in\mathcal{S}} h_{nj}}{A_j A_j^F y_j}
\end{aligned}
$$

Usando (109) e (110) na equação (97), obtém-se $\tilde{p}_j = \left(\sum_{n\in\mathcal{B}} z_{nj}(1-\phi_{nj})\right)/A_j y_j$, pois

$$
\begin{aligned}
\frac{\tilde{p}_j}{A_j^Z} &= \left(\sum_{n\in\mathcal{B}}\left(\frac{\alpha_{nj}}{\left(a_{nj}^z(1-\phi_{nj})\right)^{\zeta_j}}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}}\right)^{\frac{\zeta_j-1}{\zeta_j}} \\
&= \left(\sum_{n\in\mathcal{B}}\left(\frac{z_{nj}(1-\phi_{nj})}{\sum_{n\in\mathcal{B}} z_{lj}(1-\phi_{lj})}\left(\frac{A_j A_j^Z y_j}{z_{nj}(1-\phi_{nj})}\right)^{\zeta_j}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}}\right)^{\frac{\zeta_j-1}{\zeta_j}} \\
&= \left(\left(A_j A_j^Z y_j\right)^{\frac{\zeta_j}{1-\zeta_j}}\sum_{n\in\mathcal{B}}\left(\frac{[z_{nj}(1-\phi_{nj})]^{1-\zeta_j}}{\sum_{l\in\mathcal{B}} z_{lj}(1-\phi_{lj})}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}}\right)^{\frac{\zeta_j-1}{\zeta_j}} \\
&= \frac{1}{A_j A_j^Z y_j}\left(\frac{\sum_{n\in\mathcal{B}} z_{nj}(1-\phi_{nj})}{\left(\sum_{l\in\mathcal{B}} z_{lj}(1-\phi_{lj})\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}}}\right)^{\frac{\zeta_j-1}{\zeta_j}} = \frac{\sum_{n\in\mathcal{B}} z_{nj}(1-\phi_{nj})}{A_j A_j^Z y_j}
\end{aligned}
$$

Usando os valores obtidos para $\tilde{Q}_j$ e $\tilde{p}_j$ em (56), obtém-se que sob (108)

$$
\begin{aligned}
\frac{\tilde{c}_j}{A_j} &= \left(\left[\frac{\eta_j}{\tilde{p}_j^{\sigma_j}}\right]^{\frac{1}{1-\sigma_j}} + \left[\frac{1-\eta_j}{\tilde{Q}_j^{\sigma_j}}\right]^{\frac{1}{1-\sigma_j}}\right)^{\frac{\sigma_j-1}{\sigma_j}} \\
&= \left(\left[\frac{\left(\frac{\hat{Z}_j}{A_j y_j}\right)^{-\sigma_j}\hat{Z}_j}{\tilde{K}_j + \tilde{H}_j + \hat{Z}_j}\right]^{\frac{1}{1-\sigma_j}} + \left[\frac{\left(\frac{\tilde{H}_j+\tilde{H}_j}{A_j y_j}\right)^{-\sigma_j}(\tilde{K}_j + \tilde{H}_j)}{\tilde{K}_j + \tilde{H}_j + \hat{Z}_j}\right]^{\frac{1}{1-\sigma_j}}\right)^{\frac{\sigma_j-1}{\sigma_j}} = \frac{\tilde{K}_j + \tilde{H}_j + \hat{Z}_j}{A_j y_j}
\end{aligned}
$$

em que $\tilde{K}_j = \sum_{n\in B} k_{nj}$, $\tilde{H}_j = \sum_{m\in S} h_{mj}$ e $\hat{Z}_j = \sum_{n\in\mathcal{B}} z_{nj}(1-\phi_{nj})$.

Assim, obteve-se $\alpha_{ij}\tilde{p}_j/(1-\phi_{ij}) = z_{ij}/A_j y_j$ e $\eta_j\tilde{c}_j = \hat{Z}_j/y_j$. Com isso, a condição (96) é satisfeita se e somente se

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{y_j}{z_{ij}}\left(\frac{\alpha_{ij}\tilde{p}_j/(1-\phi_{ij})}{\left(A_j^Z a_{ij}^z\right)^{\zeta_j}}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}}\left(\frac{\eta_j\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{p}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} = \frac{y_j}{z_{ij}}\left(\frac{z_{ij}/A_j y_j}{\left(A_j^Z a_{ij}^z\right)^{\zeta_j}}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}}\left(\frac{\eta_j\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{p}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} \\ &= \frac{y_j}{z_{ij}}\left(\frac{z_{ij}/A_j y_j}{(z_{ij}/A_j y_j)^{\zeta_j}}\right)^{\frac{1}{1-\zeta_j}}\left(\frac{\eta_j\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{p}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} = \frac{1}{A_j}\left(\frac{\eta_j\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{p}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} = \left(\frac{\eta_j\tilde{c}_j}{A_j\tilde{p}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} \\ &= \left(\frac{\hat{Z}_j/y_j}{A_j(\hat{Z}_j/A_j y_j)}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} = 1. \end{aligned}$$

Similarmente, obteve-se $\kappa_{ij}\tilde{R}_j = k_{ij}/A_j A_j^F y_j$, $\theta_j\tilde{Q}_j = \tilde{K}_j/A_j y_j$ e $(1-\eta_j)\tilde{c}_j = (\tilde{K}_j + \tilde{H}_j)/y_j$. Com isso, a condição (98) é satisfeita se e somente se

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{y_j}{k_{ij}}\left(\frac{\kappa_{ij}\tilde{R}_j}{\left(A_j^K a_{ij}^k\right)^{\lambda_{kj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}}\left(\frac{\theta_j\tilde{Q}_j}{\left(A_j^F\right)_j^{\rho}\tilde{R}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}\left(\frac{(1-\eta_j)\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{Q}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} \\ &= \frac{y_j}{k_{ij}}\left(\frac{k_{ij}/A_j A_j^F y_j}{\left(k_{ij}/A_j A_j^F y_j\right)^{\lambda_{kj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{kj}}}\left(\frac{\theta_j\tilde{Q}_j}{\left(A_j^F\right)_j^{\rho}\tilde{R}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}\left(\frac{(1-\eta_j)\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{Q}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} \\ &= \frac{1}{A_j A_j^F}\left(\frac{\theta_j\tilde{Q}_j}{\left(A_j^F\right)_j^{\rho}\tilde{R}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}\left(\frac{(1-\eta_j)\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{Q}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} = \left(\frac{\theta_j\tilde{Q}_j}{A_j^F\tilde{R}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}\left(\frac{(1-\eta_j)\tilde{c}_j}{A_j\tilde{Q}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} \\ &= \left(\frac{\tilde{K}_j/A_j y_j}{A_j^F\tilde{K}_j/A_j A_j^F y_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}\left(\frac{(\tilde{K}_j+\tilde{H}_j)/y_j}{A_j(\tilde{K}_j+\tilde{H}_j)/A_j y_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} = 1 \end{aligned}$$

Simetricamente, obteve-se $\omega_{ij}\tilde{W}_j = h_{ij}/A_j A_j^F y_j$, $(1-\theta_j)\tilde{Q}_j = \tilde{H}_j/A_j y_j$ e $(1-\eta_j)\tilde{c}_j = (\tilde{K}_j+\tilde{H}_j)/y_j$. Com isso, a condição (99) é satisfeita se e somente se

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{y_j}{h_{ij}}\left(\frac{\omega_{ij}\tilde{W}_j}{\left(A_j^H a_{ij}^h\right)^{\lambda_{hj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}}\left(\frac{(1-\theta_j)\tilde{Q}_j}{\left(A_j^F\right)_j^{\rho}\tilde{W}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}\left(\frac{(1-\eta_j)\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{Q}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} \\ &= \frac{y_j}{h_{ij}}\left(\frac{h_{ij}/A_j A_j^F y_j}{\left(h_{ij}/A_j A_j^F y_j\right)^{\lambda_{hj}}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_{hj}}}\left(\frac{(1-\theta_j)\tilde{Q}_j}{\left(A_j^F\right)_j^{\rho}\tilde{W}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}\left(\frac{(1-\eta_j)\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{Q}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} \\ &= \frac{1}{A_j A_j^F}\left(\frac{(1-\theta_j)\tilde{Q}_j}{\left(A_j^F\right)_j^{\rho}\tilde{W}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}\left(\frac{(1-\eta_j)\tilde{c}_j}{(A_j)^{\sigma_j}\tilde{Q}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} = \left(\frac{(1-\theta_j)\tilde{Q}_j}{A_j^F\tilde{W}_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}\left(\frac{(1-\eta_j)\tilde{c}_j}{A_j\tilde{Q}_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} \\ &= \left(\frac{\tilde{H}_j/A_j y_j}{A_j^F\tilde{H}_j/A_j A_j^F y_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}\left(\frac{(\tilde{K}_j+\tilde{H}_j)/y_j}{A_j(\tilde{K}_j+\tilde{H}_j)/A_j y_j}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} = 1 \end{aligned}$$

A condição (104) é equivalente a

$$1 = \frac{\tilde{H}_j}{\tilde{K}_j}\left(\frac{\theta_j}{1-\theta_j}\left(\frac{\tilde{W}_j}{\tilde{R}_j}\right)^{\rho_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} = \frac{\tilde{H}_j}{\tilde{K}_j}\left(\frac{\tilde{K}_j}{\tilde{H}_j}\left(\frac{\frac{\tilde{H}_j}{A_j A_j^F y_j}}{\frac{\tilde{H}_j}{A_j A_j^F y_j}}\right)^{\rho_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} = 1.$$

A condição (107) é também é satisfeita, pois ela é equivalente a

$$\frac{\hat{Z}_j}{\tilde{F}_j} = \frac{\tilde{Z}_j}{\tilde{F}_j} - \sum_{i \in \mathcal{B}} \frac{z_{ij}}{\tilde{F}_j} \phi_{ij} = \left(\frac{\eta_j}{1-\eta_j} \left(\frac{\tilde{Q}_j}{\tilde{p}_j} \right)^{\sigma_j} \right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}} = \left(\frac{\hat{Z}_j}{\tilde{K}_j + \tilde{H}_j} \left(\frac{(\tilde{K}_j + \tilde{H}_j)/A_j y_j}{\hat{Z}_j / A_j y_j} \right)^{\sigma_j} \right)^{\frac{1}{1-\sigma_j}}$$

□

Os fluxos de consumo $P_i z_{i\mathsf{c}} = z_{i\mathsf{c}}$ e $P_i z_{i\mathsf{g}} = z_{i\mathsf{g}}$ também são disponibilizados na tabela 3 e podem ser usados para disciplinar os valores para os parâmetros da economia. Especificamente, usando as condições de otimalidade apresentadas nos lemas 3, 4 e 6, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{z_{i\mathsf{c}t}}{z_{n\mathsf{c}t}} &= \frac{\left(\varphi_{ic} \hat{P}_t / P_{it} (a_i^c)^{\gamma_c}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}} C_t}{\left(\varphi_{nc} \hat{P}_t / P_{nt} (a_n^c)^{\gamma_c}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}} C_t} = \left(\frac{\varphi_{ic}}{\varphi_{nc}} \left(\frac{a_n^c}{a_i^c} \right)^{\gamma_c} \right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}} \quad \text{se } z_{n\mathsf{c}t} > 0 && (112) \\
\varphi_{ic} &= 0 \quad \text{se } z_{n\mathsf{c}t} = 0 && (113) \\
\frac{z_{i\mathsf{g}t}}{z_{n\mathsf{g}t}} &= \frac{\left(\varphi_{i\mathsf{g}} \hat{P}_t^{\mathsf{g}} / P_{it}^{\mathsf{g}} (a_i^{\mathsf{g}})^{\gamma_{\mathsf{g}}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_{\mathsf{g}}}} G_t}{\left(\varphi_{n\mathsf{g}} \hat{P}_t^{\mathsf{g}} / P_{nt}^{\mathsf{g}} (a_n^{\mathsf{g}})^{\gamma_{\mathsf{g}}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_{\mathsf{g}}}} G_t} = \left(\frac{\varphi_{i\mathsf{g}}}{\varphi_{n\mathsf{g}}} \left(\frac{a_n^{\mathsf{g}}}{a_i^{\mathsf{g}}} \right)^{\gamma_{\mathsf{g}}} \right)^{\frac{1}{1-\gamma_{\mathsf{g}}}} \quad \text{se } z_{n\mathsf{g}t} > 0 && (114) \\
\varphi_{i\mathsf{g}} &= 0 \quad \text{se } z_{n\mathsf{g}t} = 0 && (115)
\end{aligned}$$

O lado esquerdo das equações (112) e (114) está disponível na tabela 3 e seu o lado direito é claramente definido de forma completa pelos parâmetros $(\varphi_{ic}, \varphi_{i\mathsf{g}}, a_i^c, a_i^{\mathsf{g}}, \gamma_c, \gamma_{\mathsf{g}})$. Como o sistema (112–113) é definido para cada $i \in \mathcal{B}$, ao fixar n em (112–113) com $z_{n\mathsf{c}} > 0$, obtém-se um sistema com $(b-1)$ equações para cada $j \in \mathcal{B}$. Usando que $\sum_{i \in \mathcal{B}} \varphi_{ic} = 1$, obtém-se um sistema com b equações lineares em $\{\varphi_{ic}\}_{i \in \mathcal{B}}$ que pode ser resolvido para escrever $\{\varphi_{ic}\}_{i \in \mathcal{B}}$ como função de $(\{a_i^c\}_{i \in \mathcal{B}}, \gamma_c)$. Similarmente, como o sistema (114–115) é definido para cada $i \in \mathcal{B}$, ao fixar n em (114–115) com $z_{n\mathsf{g}} > 0$, obtém-se um sistema com $(b-1)$ equações para cada $j \in \mathcal{B}$. Usando que $\sum_{i \in \mathcal{B}} \varphi_{i\mathsf{g}} = 1$, obtém-se um sistema com b equações lineares em $\{\varphi_{i\mathsf{g}}\}_{i \in \mathcal{B}}$ que pode ser resolvido para escrever $\{\varphi_{i\mathsf{g}}\}_{i \in \mathcal{B}}$ como função de $(\{a_i^{\mathsf{g}}\}_{i \in \mathcal{B}}, \gamma_{\mathsf{g}})$.

Os fluxos de consumo $P_i z_{i\mathsf{c}} / \langle P, z_{\cdot\mathsf{c}} \rangle$ e $P_i z_{i\mathsf{g}} / \langle P, z_{\cdot\mathsf{g}} \rangle$ também são disponibilizados na tabela 3 e podem ser usados para disciplinar os valores para os parâmetros da economia. Explorando novamente as condições de otimalidade apresentadas nos lemas 3, 4 e 6, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{z_{i\mathsf{c}t}}{\langle P, z_{\cdot\mathsf{c}} \rangle} &= \left(\frac{\varphi_{ic} \hat{P}_t / P_{it}}{(a_i^c)^{\gamma_c}} \right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}} \frac{C_t}{\langle P, z_{\cdot\mathsf{c}} \rangle} = \left(\frac{\varphi_{ic} \hat{P}_t}{(a_i^c)^{\gamma_c}} \right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}} \frac{1}{\hat{P}_t} = \left(\varphi_{ic} \left(\frac{\hat{P}_t}{a_i^c} \right)^{\gamma_c} \right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}} && (116) \\
\frac{z_{i\mathsf{g}t}}{\langle P, z_{\cdot\mathsf{g}} \rangle} &= \left(\frac{\varphi_{i\mathsf{g}} \hat{P}_t^{\mathsf{g}} / P_{it}^{\mathsf{g}}}{(a_i^{\mathsf{g}})^{\gamma_{\mathsf{g}}}} \right)^{\frac{1}{1-\gamma_{\mathsf{g}}}} \frac{G_t}{\langle P, z_{\cdot\mathsf{g}} \rangle} = \left(\frac{\varphi_{i\mathsf{g}} \hat{P}_t^{\mathsf{g}}}{(a_i^{\mathsf{g}})^{\gamma_{\mathsf{g}}}} \right)^{\frac{1}{1-\gamma_{\mathsf{g}}}} \frac{1}{\hat{P}_t^{\mathsf{g}}} = \left(\varphi_{i\mathsf{g}} \left(\frac{\hat{P}_t^{\mathsf{g}}}{a_i^{\mathsf{g}}} \right)^{\gamma_{\mathsf{g}}} \right)^{\frac{1}{1-\gamma_{\mathsf{g}}}} && (117)
\end{aligned}$$

em que se usou os fatos $\langle P, z_{\cdot\mathsf{c}} \rangle = \hat{P}_t C_t$ e $\langle P^{\mathsf{g}}, z_{\cdot\mathsf{g}} \rangle = \hat{P}_t^{\mathsf{g}} G_t$. Para ver que o lado direito dessa equação depende somente de parâmetros, note que

$$\hat{P}_t = \left(\sum_{n\in\mathcal{B}} \left(\frac{\varphi_{nc}}{(a_n^c P_{nt})^{\gamma_c}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}}\right)^{\frac{\gamma_c-1}{\gamma_c}} = \left(\sum_{n\in\mathcal{B}} \left(\frac{\varphi_{nc}}{(a_n^c)^{\gamma_c}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}}\right)^{\frac{\gamma_c-1}{\gamma_c}} \tag{118}$$

$$\hat{P}_t^{\mathrm{g}} = \left(\sum_{n\in\mathcal{B}} \left(\frac{\varphi_{n\mathrm{g}}}{(a_n^{\mathrm{g}} P_{nt}^{\mathrm{g}})^{\gamma_{\mathrm{g}}}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_{\mathrm{g}}}}\right)^{\frac{\gamma_{\mathrm{g}}-1}{\gamma_{\mathrm{g}}}} = \left(\sum_{n\in\mathcal{B}} \left(\frac{\varphi_{n\mathrm{g}}}{(a_n^{\mathrm{g}})^{\gamma_{\mathrm{g}}}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_{\mathrm{g}}}}\right)^{\frac{\gamma_{\mathrm{g}}-1}{\gamma_{\mathrm{g}}}} \tag{119}$$

Assim, o lado direito de (116) é completamente definido por $\{a_n^c\}_{n\in\mathcal{B}}$ e $(\gamma_c, \{\varphi_{nc}\}_{n\in\mathcal{B}})$ e, similarmente, o lado direito de (117) é completamente definido por $\{a_n^{\mathrm{g}}\}_{n\in\mathcal{B}}$ e $(\gamma_{\mathrm{g}}, \{\varphi_{n\mathrm{g}}\}_{n\in\mathcal{B}})$. Como essas equações são definidas para cada $i \in \mathcal{B}$, (116) define um sistema de b equações, cujo vetor de variáveis é dado pelo vetor de parâmetros $(\{a_n^c\}_{n\in\mathcal{B}}, \gamma_c, \{\varphi_{nc}\}_{n\in\mathcal{B}})$. Este sistema pode, a princípio, ser resolvido para escrever $\{a_n^c\}_{n\in\mathcal{B}}$ como uma função de $(\gamma_c, \{\varphi_{nc}\}_{n\in\mathcal{B}})$. Similarmente, (117) define um sistema de b equações, cujo vetor de variáveis é dado pelo vetor de parâmetros $(\{a_n^{\mathrm{g}}\}_{n\in\mathcal{B}}, \gamma_{\mathrm{g}}, \{\varphi_{n\mathrm{g}}\}_{n\in\mathcal{B}})$. Este sistema pode, a princípio, resolvido para escrever $\{a_n^{\mathrm{g}}\}_{n\in\mathcal{B}}$ como uma função de $(\gamma_{\mathrm{g}}, \{\varphi_{n\mathrm{g}}\}_{n\in\mathcal{B}})$.

Com base no exposto, dado palpite para o vetor $(\{a_i^c, a_i^{\mathrm{g}}\}_{i\in\mathcal{B}}, \gamma_c, \gamma_{\mathrm{g}})$, pode obter $\{\varphi_{nc}, \varphi_{n\mathrm{g}}\}_{n\in\mathcal{B}}$ como a solução do sistema de $2b$ equações lineares definido por (112–115). Este vetor, por sua vez, o qual pode ser usado para obter um novo palpite para $\{a_i^c, a_i^{\mathrm{g}}\}_{i\in\mathcal{B}}$ resolvendo-se o sistema de equações definido por (116) e (117). Após repetição iterativa desse procedimento, eventual convergência dos palpites obtidos para $\{a_i^c, a_i^{\mathrm{g}}\}_{i\in\mathcal{B}}$ define os parâmetros em $\{\varphi_{ic}, \varphi_{i\mathrm{g}}, a_i^c, a_i^{\mathrm{g}}\}_{i\in\mathcal{B}}$ como uma função de γ_c e γ_{g}.

Análise similar pode ser feita para o consumo de horas de lazer. Os fluxos de oferta de trabalho $W_i h_i^s = h_i^s$ também são disponibilizados na tabela 3 e podem ser usados para disciplinar os valores para os parâmetros da economia. Especificamente, usando as condições de otimalidade apresentadas nos lemas 3, 4, tem-se

$$\frac{W_i(\bar{l}_i - h_i^s)}{W_n(\bar{l}_n - h_n^s)} = \frac{\bar{l}_i - H_i}{\bar{l}_n - H_n} = \frac{W_i\left(\varphi_{il}\hat{W}_t/\bar{W}_{it}(a_i^l)^{\gamma_l}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_l}} L_t}{W_n\left(\varphi_{nl}\hat{W}_t/\bar{W}_{nt}(a_n^l)^{\gamma_l}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_l}} L_t} = \left(\frac{\varphi_{il}}{\varphi_{nl}}\left(\frac{a_n^l}{a_i^l}\right)^{\gamma_l}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_l}} \tag{120}$$

$$\varphi_{nl} = 0 \quad \text{se } H_n = \bar{l}_n \tag{121}$$

Os termos H_i e H_n presentes no lado esquerdo das equações (120) estão disponíveis na tabela 3. O lado direito desta equação é claramente definido de forma completa pelos parâmetros $(\varphi_{il}, \varphi_{nl}, a_i^l, a_n^l, \gamma_l)$. Como o sistema (120–121) é definido para cada $(i,n) \in \mathcal{S}^2$, ao fixar n em (120–121) com $z_{nl} = \bar{l}_n - H_n > 0$, obtém-se um sistema com $(s-1)$ equações. Usando que $\sum_{i\in\mathcal{S}} \varphi_{il} = 1$, obtém-se um sistema com s equações lineares em $\{\varphi_{il}\}_{i\in\mathcal{S}}$ que pode ser resolvido para escrever $\{\varphi_{il}\}_{i\in\mathcal{S}}$ como função de $(\{a_i^l, \bar{l}_i\}_{i\in\mathcal{S}}, \gamma_l)$.

Os fluxos de oferta de trabalho $W_i h_i^s / \langle W, h_{.l}\rangle$ também são disponibilizados na tabela 3 e podem ser usados para disciplinar os valores para os parâmetros da economia. Especificamente, usando as condições de otimalidade apresentadas nos lemas 3, 4, tem-se

$$
\begin{aligned}
\frac{W_i h_i^s}{\langle W, \bar{l}_\cdot - h_{\cdot l}\rangle} &= \frac{W_i \bar{l}_i}{\langle W, \bar{l}_\cdot - h_{\cdot l}\rangle} - W_i \left(\frac{\varphi_{il}\hat{W}_t/\bar{W}_{it}}{(a_i^l)^{\gamma_l}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_l}} \frac{L_t}{\langle W, \bar{l}_\cdot - h_{\cdot l}\rangle} \\
&= \frac{\bar{l}_i}{\langle W, \bar{l}_\cdot - h_{\cdot l}\rangle} - \left(\frac{\varphi_{il}\hat{W}_t}{(a_i^l)^{\gamma_l}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_l}} \frac{1}{\hat{W}_t} = \frac{\bar{l}_i}{\langle W, \bar{l}_\cdot - h_{\cdot l}\rangle} - \left(\varphi_{il}\left(\frac{\hat{W}_t}{a_i^l}\right)^{\gamma_l}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_l}} \qquad (122)
\end{aligned}
$$

em que se usou $\langle W, \bar{l}_\cdot - h_{\cdot l}\rangle = \hat{W}_t L_t$. Para ver que o lado direito depende somente de parâmetros, note que

$$
\hat{W}_t = \left(\sum_{n\in\mathcal{S}} \left[\varphi_{nl}/(a_n^l W_{nt})^{\gamma_l}\right]^{\frac{1}{1-\gamma_l}}\right)^{\frac{\gamma_l-1}{\gamma_l}} = \left(\sum_{n\in\mathcal{S}} \left[\varphi_{nl}/(a_n^l)^{\gamma_l}\right]^{\frac{1}{1-\gamma_l}}\right)^{\frac{\gamma_l-1}{\gamma_l}} \qquad (123)
$$

Assim, o lado direito de (122) é completamente definido por $\{a_n^l\}_{n\in\mathcal{S}}$ e $\left(\gamma_l, \bar{l}_i, \{\varphi_{nl}\}_{n\in\mathcal{S}}\right)$. Como essa equação é definida para cada $i \in \mathcal{S}$ o sistema de equações definido por (122) pode ser resolvido para escrever $\{a_n^l\}_{n\in\mathcal{S}}$ como uma função de $\left(\gamma_l, \left\{\bar{l}_n, \varphi_{nl}\right\}_{n\in\mathcal{S}}\right)$.

Com base no exposto, dado palpite para o vetor $(\{a_i^l, \bar{l}_i\}_{i\in\mathcal{S}}, \gamma_l)$, pode-se obter $\{\varphi_{nc}\}_{n\in\mathcal{S}}$ como a solução do sistema de b equações lineares definido por (120–121). Este vetor, por sua vez, o qual pode ser usado para obter um novo palpite para $\{a_i^l\}_{i\in\mathcal{S}}$ resolvendo-se o sistema de equações definido por (120) e (121). Após repetição iterativa desse procedimento, eventual convergência dos palpites obtidos para $\{a_i^l\}_{i\in\mathcal{S}}$ define os parâmetros em $\{\varphi_{il}, a_i^l\}_{i\in\mathcal{S}}$ como uma função de γ_l e $\{\bar{l}_n\}_{n\in\mathcal{S}}$. O valor de cada $\bar{l}_n$ pode ser obtido assumindo $\bar{l}_n = H_n/(1-d_{nt})$, em que d_{nt} é taxa de desemprego de fato observada na economia para o trabalho tipo n no ano base.

Lemma 11. *Suponha que*

$$
\varphi_{i\mathsf{c}} = \frac{z_{i\mathsf{c}}}{\sum_{n\in\mathcal{B}} z_{n\mathsf{c}}}, \qquad a_i^{\mathsf{c}} = \frac{z_{i\mathsf{c}}}{\sum_{n\in\mathcal{B}} z_{n\mathsf{c}} + \sum_{n\in\mathcal{S}}(\bar{l}_n - h_n)}, \qquad (124)
$$

$$
\varphi_{il} = \frac{\bar{l}_i - h_i}{\sum_{n\in\mathcal{S}}(\bar{l}_n - h_n)}, \qquad a_i^l = \frac{\bar{l}_i - h_i}{\sum_{n\in\mathcal{B}} z_{n\mathsf{c}} + \sum_{n\in\mathcal{S}}(\bar{l}_n - h_n)} \qquad (125)
$$

$$
\varphi_{i\mathsf{g}} = a_i^{\mathsf{g}} = \frac{z_{i\mathsf{g}}}{\sum_{n\in\mathcal{B}} z_{n\mathsf{g}}} \quad e \quad \nu = \frac{\sum_{i\in\mathcal{B}} z_{i\mathsf{c}}}{\sum_{n\in\mathcal{B}} z_{n\mathsf{c}} + \sum_{n\in\mathcal{S}}(\bar{l}_n - h_n)} \qquad (126)
$$

Então são satisfeitas as condições (116), (117), (122) e $\sum_{i\in\mathcal{B}}\varphi_{i\mathsf{c}} = \sum_{i\in\mathcal{B}}\varphi_{i\mathsf{g}} = \sum_{i\in\mathcal{S}}\varphi_{il} = 1$.

Proof. As condições em $\sum_{i\in\mathcal{B}}\varphi_{i\mathsf{c}} = \sum_{i\in\mathcal{B}}\varphi_{i\mathsf{g}} = \sum_{i\in\mathcal{S}}\varphi_{il} = 1$ são satisfeitas por construção. Sob tais propriedades, usando $\varphi_{i\mathsf{g}} = a_i^{\mathsf{g}}$ na equação (119) gera $\hat{P}_t^{\mathsf{g}} = 1$. Agora, usando (124) em (118), obtém-se

$$
\begin{aligned}
\hat{P}_t &= \left(\sum_{n\in\mathcal{B}}\left(\frac{\varphi_{nc}}{(a_n^{\mathsf{c}})^{\gamma_c}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}}\right)^{\frac{\gamma_c-1}{\gamma_c}} = \left(\sum_{n\in\mathcal{B}}\left(\frac{z_{nc}}{\sum_{i\in\mathcal{B}} z_{i\mathsf{c}}}\left(\frac{\sum_{i\in\mathcal{B}} z_{i\mathsf{c}} + \sum_{i\in\mathcal{S}}(\bar{l}_i - h_i)}{z_{nc}}\right)^{\gamma_c}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}}\right)^{\frac{\gamma_c-1}{\gamma_c}} \\
&= \frac{1}{\sum_{i\in\mathcal{B}} z_{i\mathsf{c}} + \sum_{m\in\mathcal{S}}(\bar{l}_m - h_m)}\left(\frac{\sum_{n\in\mathcal{B}} z_{n\mathsf{c}}}{\left(\sum_{i\in\mathcal{B}} z_{i\mathsf{c}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}}}\right)^{\frac{\gamma_c-1}{\gamma_c}} = \frac{\sum_{n\in\mathcal{B}} z_{n\mathsf{c}}}{\sum_{i\in\mathcal{B}} z_{i\mathsf{c}} + \sum_{m\in\mathcal{S}}(\bar{l}_m - h_m)} \qquad (127)
\end{aligned}
$$

Similarmente, usando (125) na equação (123), obtém-se

$$\begin{aligned}\hat{W}_t &= \left(\sum_{n\in\mathcal{S}}\left[\frac{\varphi_{nl}}{(a_n^l)^{\gamma_l}}\right]^{\frac{1}{1-\gamma_l}}\right)^{\frac{\gamma_l-1}{\gamma_l}} = \left(\sum_{n\in\mathcal{S}}\left[\frac{\bar{l}_n-h_n}{\sum_{i\in\mathcal{S}}(\bar{l}_i-h_i)}\left(\frac{\sum_{i\in\mathcal{B}}z_{i\mathrm{c}}+\sum_{i\in\mathcal{S}}(\bar{l}_i-h_i)}{\bar{l}_n-h_n}\right)^{\gamma_l}\right]^{\frac{1}{1-\gamma_l}}\right)^{\frac{\gamma_l-1}{\gamma_l}}\\ &= \frac{1}{\sum_{i\in\mathcal{B}}z_{i\mathrm{c}}+\sum_{i\in\mathcal{S}}(\bar{l}_i-h_i)}\left(\frac{\sum_{n\in\mathcal{S}}(\bar{l}_n-h_n)}{\left[\sum_{i\in\mathcal{S}}(\bar{l}_i-h_i)\right]^{\frac{1}{1-\gamma_l}}}\right)^{\frac{\gamma_l-1}{\gamma_l}} = \frac{\sum_{n\in\mathcal{S}}(\bar{l}_n-h_n)}{\sum_{i\in\mathcal{B}}z_{i\mathrm{c}}+\sum_{i\in\mathcal{S}}(\bar{l}_i-h_i)} \qquad (128)\end{aligned}$$

Usando $\varphi_{i\mathrm{g}} = a_i^{\mathrm{g}}$ e $\hat{P}_t^{\mathrm{g}} = 1$ em (117), obtém-se $\varphi_{i\mathrm{g}} = z_{i\mathrm{g}}/(\sum_{n\in\mathcal{B}} z_{n\mathrm{g}})$, a qual é evidentemente satisfeita sob (126). Usando (124) e (127), obtém-se $\hat{P}_t/a_i^c = \sum_{n\in\mathcal{B}} z_{n\mathrm{c}}/z_{i\mathrm{c}}$. Assim, (116) é satisfeita, visto que

$$\left(\varphi_{ic}\left(\frac{\hat{P}_t}{a_i^c}\right)^{\gamma_c}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}} = \left(\frac{z_{i\mathrm{c}}}{\sum_{n\in\mathcal{B}}z_{n\mathrm{c}}}\left(\frac{\sum_{n\in\mathcal{B}}z_{n\mathrm{c}}}{z_{i\mathrm{c}}}\right)^{\gamma_c}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_c}} = \frac{z_{i\mathrm{c}}}{\sum_{n\in\mathcal{B}}z_{n\mathrm{c}}}$$

Usando (125) e (128), obtém-se $\hat{W}_t/a_i^l = \sum_{n\in\mathcal{S}}(\bar{l}_n - h_n)/(\bar{l}_i - h_i)$. Assim, (122) é satisfeita, visto que

$$\left(\varphi_{il}\left(\frac{\hat{W}_t}{a_i^l}\right)^{\gamma_l}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_l}} = \left(\frac{\bar{l}_i-h_i}{\sum_{n\in\mathcal{S}}(\bar{l}_n-h_n)}\left(\frac{\sum_{n\in\mathcal{S}}(\bar{l}_n-h_n)}{\bar{l}_i-h_i}\right)^{\gamma_l}\right)^{\frac{1}{1-\gamma_l}} = \frac{\bar{l}_i-h_i}{\sum_{n\in\mathcal{S}}(\bar{l}_n-h_n)}$$

Por fim, note que a condição (33) é satisfeita, pois $\hat{P}_t/\hat{W}_t = \sum_{n\in\mathcal{B}} z_{n\mathrm{c}}/\sum_{n\in\mathcal{S}}(\bar{l}_n - h_n)$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\hat{P}_t}{\hat{W}_t}\frac{\partial U/\partial L_t}{\partial U/\partial C_t} &= \frac{1-\nu}{\nu}\left(\frac{L}{C}\right)^{\gamma-1}\frac{\hat{P}_t}{\hat{W}_t} = \frac{1-\nu}{\nu}\left(\frac{\langle W, \bar{l}_\cdot - h_{\cdot l}\rangle/\hat{W}}{\langle P, z_{\cdot\mathrm{c}}\rangle/\hat{P}_t}\right)^{\gamma-1}\frac{\hat{P}_t}{\hat{W}_t}\\ &= \frac{1-\nu}{\nu}\left(\frac{\langle W, \bar{l}_\cdot - h_{\cdot l}\rangle}{\langle P, z_{\cdot\mathrm{c}}\rangle}\right)^{\gamma-1}\left(\frac{\hat{P}_t}{\hat{W}_t}\right)^{\gamma}\\ &= \frac{1-\nu}{\nu}\left(\frac{\sum_{n\in\mathcal{S}}(\bar{l}_n-h_n)}{\sum_{n\in\mathcal{B}}z_{n\mathrm{c}}}\right)^{\gamma-1}\left(\frac{\sum_{n\in\mathcal{B}}z_{n\mathrm{c}}}{\sum_{n\in\mathcal{S}}(\bar{l}_n-h_n)}\right)^{\gamma} = \frac{1-\nu}{\nu}\frac{\sum_{n\in\mathcal{B}}z_{n\mathrm{c}}}{\sum_{n\in\mathcal{S}}(\bar{l}_n-h_n)} = 1\end{aligned}$$

em que a última igualdade decorre do valor de ν apresentado em (126). □

Os fluxos de investimento $P_i z_{i\mathrm{k}}/k_i = z_{i\mathrm{k}}/K_i$ e $P_i z_{i\mathrm{gk}}/k_i^{\mathrm{g}} = z_{i\mathrm{gk}}/K_i^{\mathrm{g}}$ também são disponibilizados na tabela 3 e podem ser usados para disciplinar os valores para os parâmetros da economia[8]. Especificamente, usando a equação (34), obtém-se $a_i^{\mathrm{k}} = 1/[1/\beta - 1 + \delta_i]$ e $a_i^{\mathrm{gk}} = 1/[1/\beta - 1 + \delta_i^{\mathrm{g}}]$ e, usando as condições de $z_{i\mathrm{k}} = a_i^{\mathrm{k}}\delta_i k_i$ e $z_{i\mathrm{gk}} = a_i^{\mathrm{gk}}\delta_i^{\mathrm{g}} k_i^{\mathrm{g}}$, obtém-se

$$\begin{aligned}k_i/z_{i\mathrm{k}} &= 1/\delta_i a_i^{\mathrm{k}} = [1/\beta - 1 + \delta_i]/\delta_i = [(1/\beta - 1)/\delta_i + 1] &(129)\\ k_i^{\mathrm{g}}/z_{i\mathrm{gk}} &= 1/\delta^{\mathrm{g}} a_i^{\mathrm{gk}} = [1/\beta - 1 + \delta_i^{\mathrm{g}}]/\delta_i^{\mathrm{g}} = [(1/\beta - 1)/\delta_i^{\mathrm{g}} + 1]. &(130)\end{aligned}$$

Assim, $\{\delta_i, \delta_i^{\mathrm{g}}\}_{i\in\mathcal{B}}$ pode ser escrito em função de β e $\{k_i/z_{i\mathrm{k}}, k_i^{\mathrm{g}}/z_{i\mathrm{k}}^{\mathrm{g}}\}_{i\in\mathcal{B}}$ e, portanto, $\{a_i^c, a_i^{\mathrm{g}}\}_{i\in\mathcal{B}}$ é também escrito em função de β e $\{k_i/z_{i\mathrm{k}}, k_i^{\mathrm{g}}/z_{i\mathrm{k}}^{\mathrm{g}}\}_{i\in\mathcal{B}}$. Enquanto os valores em $\{k_i/z_{i\mathrm{k}}, k_i^{\mathrm{g}}/z_{i\mathrm{k}}^{\mathrm{g}}\}_{i\in\mathcal{B}}$ são observados

[8] O valor de k_i^{g} é estimado igualando a taxa de depreciação entre os capitais público e privado e usando a equação de steady-state $\delta k_i = z_{i\mathrm{k}}$.

na tabela 3, os valores de β e $r_i^{\mathtt{g}}$ podem ser obtidos igualando a taxa de juros de fato observada na economia $r = R_i/P_i$ no ano base com o seu valor dentro do modelo quando $a_i^{\mathtt{k}} = 1$. Especificamente, a partir de (34) e $(R_i/P_i, a_i^{\mathtt{k}}) = (r, 1)$, obtém-se $\beta = 1/(1 + r - \delta_i)$ e $r_{it}^{\mathtt{g}} = [1/\beta - 1 + \delta_i^{\mathtt{g}}]$. Em conclusão, o vetor $\{\beta, \delta_i, \delta_i^{\mathtt{g}}, a_i^{\mathtt{k}}, a_i^{\mathtt{gk}}\}_{i\in\mathcal{B}}$ pode ser obtido a partir de $\{r_{it}, k_i/z_{i\mathtt{k}}, k_i^{\mathtt{g}}/z_{i\mathtt{k}}^{\mathtt{g}}\}_{i\in\mathcal{B}}$ fazendo

$$\left(a_i^{\mathtt{k}}, a_i^{\mathtt{gk}}\right) = \left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right), \; (\delta_i, \delta_i^{\mathtt{g}}) = \left(\frac{z_{i\mathtt{k}}}{k_i a_i^{\mathtt{k}}}, \frac{z_{i\mathtt{gk}}}{k_i^{\mathtt{g}} a_i^{\mathtt{gk}}}\right) \text{ e } \beta = \frac{1}{1 + r - \delta_i} \tag{131}$$